

2015 年度システム最適化演習問題

1. ラグランジュ乗数を用いて次の最適化問題の最適解を求めよ.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \quad (a > 0, b > 0, c > 0) \\ \text{subject to} \quad & h(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{aligned}$$

2. 不等式制約のある最適化問題

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 \\ \text{subject to} \quad & g(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - \alpha \leq 0 \end{aligned}$$

を次の手順によって解け.

- (a) ラグランジュ乗数 λ を用い、ラグランジュ関数を書け
 (b) $\lambda = 0$ として、最適解を求めよ。このとき、定数 α の範囲はどうなるか。
 (c) $\lambda > 0$ として、最適解を求めよ。このとき、定数 α の範囲はどうなるか。
3. \mathbf{R}^2 の領域 $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < 1\}$ で定義された関数

$$f(x_1, x_2) = x_1 \log x_1 + x_2 \log x_2 + (1 - x_1 - x_2) \log(1 - x_1 - x_2)$$

について次の問に答えよ.

- (i) この関数のヘッセ行列 $\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$ を計算せよ。
 (ii) この関数が凸関数であることを示せ。
 (iii) $\min_{(x_1, x_2) \in X} f(x_1, x_2)$ の最適解を求めよ。

4. \mathbf{R}^n の領域 $X = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : x_i > 0, i = 1, \dots, n\}$ で定義された関数

$$f_1(\mathbf{x}) = - \sum_{i=1}^n c_i \log x_i$$

について次の問に答えよ。ただし、 $c_i \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$) は定数とする。

- (i) この関数が凸であるための条件を求めよ。また、この関数が凸のとき、その最小値とその時の $x_i, i = 1, \dots, n$ を求めよ。
 (ii) この関数が凸であると仮定する。また、 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = M$ ($M > 0$) という制約条件を付ける。このとき、ラグランジュ乗数法を用いてこの関数の最小値とその時の $x_i, i = 1, \dots, n$ を求めよ。