

2015 年度システム最適化演習問題

1. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{a}_2$ とする. $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ は凸集合でないことを示せ (テキスト問). また, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ を結ぶ直線は凸集合であることを示せ.
2. 平面上の正方形の内部および境界を含む集合を S とする. S は凸集合であることを示せ. また, この正方形の一つの頂点を A とするとき, 正方形からこの頂点を除去した図形 $S - A$ も凸集合であることを示せ. さらに 4 つの頂点を除去した場合は凸かどうかについて示せ.
3. 次の 2 次形式 (2 次関数) を行列形式で表したときの固有値と正規化された固有ベクトルを求めよ. この関数が凸関数および狭義凸関数になるための a, b の範囲を定めよ. なお, 計算する必要はなく, 簡単な理由と答だけを書けば良い.

$$f(x, y) = ax^2 + by^2$$

4. 2×2 実対称行列の固有値は実数に限られることを示せ. (一般に $n \times n$ 実対称行列の固有値は実数になることが証明できる.)