

システム最適化演習問題 – その1

1. 関数 $y = 3x^2$ を次の区間で考察するとき、角カッコ $[A] \sim [H]$ 内にはどのような文字がはいるか。下から選べ。

- 1a. 区間 $[-1, 0]$ で $[A] y = 0, [B] y = 3$ をとる。
 1b. 区間 $[-1, 0)$ で $[C] y = 0, [D] y = 3$ をとる。
 1c. 区間 $(-1, 0]$ で $[E] y = 0, [F] y = 3$ をとる。
 1d. 区間 $(-1, 0)$ で $[G] y = 0, [H] y = 3$ をとる。
 1e. 区間 $(-1, 0)$ において $y = -10, y = 5$ は各々関数値の集合の $[I]$ と $[J]$ である。

語群： • 最大値, • 最小値, • 上限, • 下限, • 上界, • 下界

注：最小値とは、考察している領域で関数がある値をとり、それより小さい値はとらない場合。下限とは、その値より小さい値はとらない場合で、無限にその値に上から近づく場合だが、その値自身を実際にとるかどうかは問わない。下界とは、その値より小さい値はとらない場合で、その値自身を実際にとるかどうかが、また、上から無限に近づくかどうかは問わない。従って、最小値は下限、下界を兼ねているが、最小値が最も意味が強いので、最小値、下限、下界を兼ねるとはいわず、単に最小値と答える。下限は下界を兼ねているが、下限のほうがより意味が強いので、下限と答える。最大値と上限、上界についても同じ。

2. 次の関数 $f(x)$ について、大域的 maximum, 局所的 maximum, 大域的 minimum, 局所的 minimum をすべて求めよ。

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & (-2 \leq x < 0) \\ x + 2 & (0 \leq x < 1) \\ 7 - 4x & (1 \leq x \leq 2) \\ 2x - 5 & (2 < x \leq 3) \end{cases}$$

3. 講義テキスト p.6 の問の関数の代わりに $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2$ を最小化する問題に答えよ。ただし、「 r をどのようにとればよいか」については答えなくて良い。

4. 平面上にデータ点 $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ が与えられたとする。次に入力 \bar{x} だけが得られたとき、 \bar{x} から最良の出力 \bar{y} を予測したい。予測式は一次式

$$y = ax + b$$

と仮定する。係数 a, b をどのように決めればよいか。

ガウスヤルジャンドルによって、与えられたデータにもとづく予測値 $ax_i + b$ と実際の出力値 y_i の差の二乗和

$$F(a, b) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)^2$$

を最小にする解 a, b を利用することが提案された。今日まで最も良く利用されている最小二乗法である。

問 1a：最小二乗法による解 a, b は $\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \frac{\partial F}{\partial b} = 0$ を解くことによって求められる。これらの計算を行い、解 a, b を求めるための連立方程式を導出せよ。

問 1b：この連立方程式を解いて最小二乗法による解 a, b を求めよ。

問 1c：5つのデータ $(-2, 0), (-1, 0), (0, -1), (1, -2), (2, -3)$ について式 $y = ax + b$ を求め、図示せよ。