2015 年度システム最適化演習問題解答 (2015/06/08)

1. ラグランジュ乗数を用いて次の最適化問題の最適解を求めよ.

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} + \dfrac{x_3^2}{c^2} \qquad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0) \\ \text{subject to} & h(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{array}$$

(解答) $L(\boldsymbol{x}, \lambda) = \frac{1}{2}(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2}) + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$ とおく.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{x_1}{a^2} + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\lambda a^2$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{x_2}{b^2} + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\lambda b^2$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = \frac{x_3}{c^2} + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -\lambda c^2$$

これらを $x_1 + x_2 + x_3 - 1$ に代入して $\lambda = -\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$. よって $x_1 = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$, $x_2 = \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$, $x_3 = \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$.

2. 不等式制約のある最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \\ \text{subject to} & g(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - \alpha \leq 0 \end{array}$$

を次の手順によって解け.

(a) ラグランジュ乗数 λ を用い、ラグランジュ関数を書け
(b) $\lambda = 0$ として、最適解を求めよ。このとき、定数 α の範囲はどうなるか。
(c) $\lambda > 0$ として、最適解を求めよ。このとき、定数 α の範囲はどうなるか。

(解答) $L(\boldsymbol{x}, \lambda) = \frac{1}{2}(x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2) + \lambda(2x_1 + x_2 - \alpha)$ とおく.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1 - x_2 + 2\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -x_1 + 4x_2 + \lambda = 0$$

(i) $\lambda = 0$ とおくと，$x_1 = x_2 = 0$. このとき，$2x_1 + x_2 - \alpha \leq 0$ より $\alpha \geq 0$.

(ii) $\lambda > 0$ とおくと，$\lambda(2x_1 + x_2 - \alpha) = 0$ より $2x_1 + x_2 - \alpha = 0$ に注意する. $x_1 = -3\lambda$, $x_2 = -\lambda$ を $2x_1 + x_2 - \alpha = 0$ に代入すると，$\lambda = -\frac{1}{7}\alpha$. $x_1 = \frac{3}{7}\alpha$, $x_2 = \frac{1}{7}\alpha$ また，$\lambda > 0$ より $\alpha < 0$ となる.

これらをまとめると，$\alpha \geq 0$ のとき，$x_1 = x_2 = 0$. $\alpha < 0$ のとき，$x_1 = \frac{3}{7}\alpha$, $x_2 = \frac{1}{7}\alpha$.

3. $\boldsymbol{R}^2$ の領域 $X = \{\,(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 : \ x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_1 + x_2 < 1\}$ で定義された関数

$$f(x_1, x_2) = x_1 \log x_1 + x_2 \log x_2 + (1 - x_1 - x_2) \log(1 - x_1 - x_2)$$

について次の問に答えよ.

(i) この関数のヘッセ行列 $\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$ を計算せよ.

(ii) この関数が凸関数であることを示せ.

(iii) $\displaystyle\min_{(x_1, x_2) \in X} f\bigl(x_1, x_2\bigr)$ の最適解を求めよ.

(解答)
(i) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \log x_1 - \log(1 - x_1 - x_2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = \log x_2 - \log(1 - x_1 - x_2)$ より

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{1-x_1-x_2} & \frac{1}{1-x_1-x_2} \\ \frac{1}{1-x_1-x_2} & \frac{1}{x_2} + \frac{1}{1-x_1-x_2} \end{bmatrix}$$

(ii) 簡単のため $a = \frac{1}{x_1}$, $b = \frac{1}{x_2}$, $c = \frac{1}{1-x_1-x_2}$ とおき，$Q = \nabla^2 f$ とおく.

$$\begin{aligned} |\lambda E - Q| &= \lambda^2 - (a + b + 2c)\lambda + (a + c)(b + c) - c^2 \\ &= \lambda^2 - (a + b + 2c)\lambda + ab + bc + ca = 0 \end{aligned}$$

この方程式の 2 つの解を α, β とすると，$\alpha + \beta = a + b + 2c > 0$, $\alpha\beta = ab + bc + ca > 0$. よって，$\alpha > 0, \beta > 0$ となり，関数 f は凸であることがわかる.

(iii) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \log x_1 - \log(1 - x_1 - x_2) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = \log x_2 - \log(1 - x_1 - x_2) = 0$ とおくと，$x_1 = 1 - x_1 - x_2$, $x_2 = 1 - x_1 - x_2$ を得る. これを解くと $x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$.

(4 番の解答：)
$\boldsymbol{R}^n$ の領域 $X = \{\,\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \ : \ x_i > 0,\ i = 1, \ldots, n\}$ で定義された関数

$$f_1(\boldsymbol{x}) = -\sum_{i=1}^{n} c_i \log x_i$$

について次の問に答えよ. ただし，$c_i \neq 0$（$i = 1, \ldots, n$）は定数とする.

(i) この関数が凸であるための条件を求めよ．この関数の最小値とその時の x_i, $i = 1, \ldots, n$ を求めよ．

(ii) この関数が凸であると仮定する．また，$\sum_{i=1}^n x_i^2 = M$ という制約条件を付ける．このとき，ラグランジュ乗数法を用いてこの関数の最小値とその時の x_i, $i = 1, \ldots, n$ を求めよ．

(解答)
(i) $\nabla^2 f = diag[\frac{c_1}{x_1^2}, \ldots, \frac{c_n}{x_n^2}]$ ($\frac{c_1}{x_1^2}, \ldots, \frac{c_n}{x_n^2}$ を対角成分とする対角行列) となり，対角行列の固有値は対角成分そのものであるから，求める条件は $c_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).
また、$c_i > 0$ のものがあるとき、x_i が増加するに従って $f_1(\boldsymbol{x})$ は単調に減少し、$x_i \to \infty$ のとき $f_1(\boldsymbol{x}) \to -\infty$ となるから、最小値は存在しない。$c_1 = \cdots = c_n = 0$ ならば、すべての $x \in X$ について自明な最小値 $f_1(\boldsymbol{x}) = 0$ をとる。
(ii) $L(\boldsymbol{x}, \lambda) = -\sum_{i=1}^n c_i \log x_i + \frac{1}{2}\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^2 - M)$ とおく．$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{c_i}{x_i} + \lambda x_i = 0$. $x_i^2 = \frac{c_i}{\lambda}$. $\sum_{i=1}^n x_i^2 = M$ より $\lambda = M(\displaystyle\sum_j c_j)$. よって，$x_i^2 = M\dfrac{c_i}{\displaystyle\sum_{j=1}^n c_j}$. すなわち

$$x_i = \sqrt{M\frac{c_i}{\displaystyle\sum_{j=1}^n c_j}}.$$