2015 年度システム最適化演習問題解答（2015/06/01）

1. 次の式を行列形式で表せ（テキスト問の変形）．これらの関数が凸関数となるための条件および狭義凸関数となるための条件を求めよ．

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{x}) &= 4x_1^2 + 2\alpha x_1 x_2 + x_2^2 - x_1 + 5x_2 - 7 \\ f_2(\boldsymbol{x}) &= ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f \end{aligned}$$

(解答)　$f_1(\boldsymbol{x}) = [x_1, x_2]\begin{bmatrix} 4 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [-1, 5]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - 7$ より $Q = \begin{bmatrix} 4 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$ とおいて $|\lambda E - Q| = 0$ を計算すると，$\lambda^2 - 5\lambda + 4 - \alpha^2 = 0$ この 2 つの解を λ_1, λ_2 とすると，$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ の必要十分条件は $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1\lambda_2 \geq 0$．解と係数の関係から $\lambda_1 + \lambda_2 = 5$, $\lambda_1\lambda_2 = 4 - \alpha^2$ であるから，凸関数であるための条件は $-2 \leq \alpha \leq 2$.

同様に，狭義凸であるための条件は $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ すなわち $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$ より，$-2 < \alpha < 2$.

$f_2(\boldsymbol{x})$ については，解き方が同じなので，省略する．

2. $\boldsymbol{R}^3$ で定義された関数

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + x_2^2 - bx_2x_3 - cx_3^2 + x_1 - 2x_3$$

を行列を用いて表現せよ．$f_3(x_1, x_2, x_3)$ が凸関数となるために実数 a, b, c が満たすべき条件を求めよ．また、

$$f_4(x_1, x_2, x_3) = ax_1^4 + bx_1^2 + x_2^2 - cx_2x_3 - dx_3^2 + x_1 - 2x_3$$

について、この関数が凸関数になるために実数 a, b, c, d が満たすべき条件はどうなるか。

(解答)　$f_3(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}[x_1, x_2, x_3]\begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -b \\ 0 & -b & -2c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [1, 0, -2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ より

$Q = \begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -b \\ 0 & -b & -2c \end{bmatrix}$ とおき，$|\lambda E - Q| = 0$ を計算すると，

$(\lambda - 2a)\{\lambda^2 - 2(1-c)\lambda - 4c - b^2\} = 0$ この解がすべて非負であるための条件は，上の問と同様の考察により $a \geq 0$, $1 - c \geq 0$, $-4c - b^2 \geq 0$.

次に f_4 については、$f_5(\boldsymbol{x}) = ax_1^4$ とおくと、$f_4(\boldsymbol{x}) = f_5(\boldsymbol{x}) + bx_1^2 + x_2^2 - cx_2x_3 - dx_3^2 + x_1 - 2x_3$ となる。$a \geq 0$ なら $f_5(\boldsymbol{x})$ は凸で、前問の答えとあわせて、$a \geq 0$, $b \geq 0$, $1 - d \geq 0$, $-4d - c^2 \geq 0$ ならば凸関数になる。一方 $a < 0$ ならば、$x_2 = x_3 = 0$ とおき、1 次の項を無視すると、$f_4(\boldsymbol{x}) = f_5(\boldsymbol{x}) + bx_1^2 = (ax_1^2 + b)x_1^2$ となる。b の如何にかかわらず、この関数は x_1 が十分大きいとき、$-\infty$ に近づくから凸ではない。よって求める条件は $a \geq 0$, $b \geq 0$, $1 - d \geq 0$, $-4d - c^2 \geq 0$.

3. 次の文は正しいかそれとも誤りか，それぞれ理由とともに答えよ．

   (i) 直線と直線外の一点からなる集合は凸でない．

   (ii) 凸関数には必ず最小値が存在する．

   (iii) 一変数関数 $f\colon [0,1] \to \boldsymbol{R}$ がすべての $x \in [0,1]$ に対して $|f(x)| \leq 1$ を満たすならば，この関数には最大値および最小値が存在する．

(解答)

(i): 正しい．

（証明）　直線を $S = \{\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n : -\infty < t < \infty\}$ とおく．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を線形独立と仮定すると，この直線は原点を通らない．そこで，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (原点)，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} \in S$, $\lambda = \frac{1}{2}$ とおく．このとき，$\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} \notin S$.

なぜなら，$\frac{1}{2}\boldsymbol{a} \in S$ とすれば，ある t について $\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}$ となり，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が線形従属となるので，仮定に反する．

(ii): 誤り．
（反例）$\boldsymbol{R}$ において，$f(x) = e^x$ あるいは $f(x) = x$ を考えればよい．

(iii): 誤り．
たとえば、

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x = 0), \\ x & (0 < x < 1), \\ \frac{1}{2} & (x = 1). \end{cases}$$

とすれば、題意の仮定を満たし、最大値も最小値も存在しない。