# システム最適化演習問題解答 (2015/05/25)

1. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{a}_2$ とする．$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は凸集合でないことを示せ (テキスト問)．また、$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ を結ぶ直線は凸集合であることを示せ。

   (解答) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}_2$, $\lambda = \frac{1}{2}$ とおくと $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) \notin \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$．また、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を通る直線を $L$ とすると、$L = \{\lambda\boldsymbol{a}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{a}_2 : \lambda \in \boldsymbol{R}\}$ となるから、$\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + (1-\lambda_1)\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{y} = \lambda_2\boldsymbol{a}_1 + (1-\lambda_2)\boldsymbol{a}_2$, とおくと、

   $$\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} = \{\lambda\lambda_1 + (1-\lambda)\lambda_2\}\boldsymbol{a}_1 + \{\lambda(1-\lambda_1) + (1-\lambda)(1-\lambda_2)\}\boldsymbol{a}_2$$

   この式における $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ のスカラー乗数を加えると

   $$\{\lambda\lambda_1 + (1-\lambda)\lambda_2\} + \{\lambda(1-\lambda_1) + (1-\lambda)(1-\lambda_2)\} = 1$$

   となるから、$\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in L$. よって、$L$ は凸である。

2. 平面上の正方形の内部および境界を含む集合を $S$ とする。$S$ は凸集合であることを示せ。また，この正方形の一つの頂点を $A$ とするとき、正方形からこの頂点を除去した図形 $S - A$ も凸集合であることを示せ。さらに 4 つの頂点を除去した場合は凸かどうかについて示せ。

   (解答) 平面に $xy$ 座標をとり，$S$ を $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ の領域とする：$S = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$. また，$A = (0, 0)$ と $A$ を原点にとる．

   $\forall(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$ と任意の $0 \le \lambda \le 1$ に対して $\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$ であり，$0 \le \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \le 1$, $0 \le \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \le 1$ であるから，$\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) \in S$. すなわち $S$ は凸集合である．

   また，$\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) = (0, 0)$ とおくと，$\lambda = 1$, $(x_1, y_1) = (0, 0)$, あるいは $\lambda = 0$, $(x_2, y_2) = (0, 0)$, あるいは $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) = (0, 0)$ となる．これは，$S - A$ から 2 点を選んだ時，それらを結ぶ線分は $A$ を通らないことを意味している．よって $S - A$ は凸であることがわかる．

   次に 4 つの頂点を $A_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$ とすると、$S - A_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$ は凸であり、問題の図形は $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{4}(S - A_i)$ と表される。一般に $S_1$, $S_2$ が凸のとき、$S_1 \cap S_2$ も凸であることがわかっているから、$\displaystyle\bigcap_{i=1}^{4}(S - A_i)$ は凸である。

3. 次の 2 次形式（2 次関数）を行列形式で表したときの固有値と正規化された固有ベクトルを求めよ．この関数が凸関数および狭義凸関数になるための $a, b$ の範囲を定めよ．なお，計算する必要はなく，簡単な理由と答だけを書けば良い．

   $$f(x, y) = ax^2 + by^2$$

   (解答) $f(x, y) = [x, y]\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ となり，$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ は既に対角行列だから、その固有値は $a$ と $b$ である．また、対角化する必要がないということは、対角化のための変換は恒等変換で、その表現行列は単位行列．よって、これらに対する固有ベクトルは各々$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる．凸関数であるための条件は $a \ge 0,\ b \ge 0$. 狭義凸関数であるための条件は $a > 0,\ b > 0$.

4. $2 \times 2$ 実対称行列の固有値は実数に限られることを示せ．(一般に $n \times n$ 実対称行列の固有値は実数になることが証明できる．)

   (解答) $Q = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ とおき，$|\lambda E - Q| = 0$ から $\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0$ を得る．この判別式を調べると $D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \ge 0$ となるから，固有値は実数となる．