解答 (2015/5/18)

1. 次の線形計画問題を解け。

$$
\begin{aligned}
&-2x_1 - x_2 \to \min \\
&x_1 + x_2 \le a \\
&3x_1 + x_2 \le 3 \\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

ただし，$1 < a < 2$ とする．

(i) この問題を標準形に帰着させよ．

(ii) 標準形に帰着させた問題をシンプレックス法で解け．

(iii) この問題の双対問題を示し，2 段階法で解くためのシンプレックス表の最初の部分を示せ．その後の計算は不要である．

(解答)
標準形については略す．答案では省略せずに明記すること．
(ii)

基底	x_1	x_2	x_3	x_4	定数
$-z$	$\underline{-2}$	-1			0
x_3	1	1	1		a
x_4	$\boxed{3}$	1		1	3
$-z$		$\underline{-\frac{1}{3}}$		$\frac{2}{3}$	2
x_3		$\boxed{\frac{2}{3}}$	1	$-\frac{1}{3}$	$a-1$
x_1	1	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	1
$-z$			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{a+3}{2}$
x_2		1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3(a-1)}{2}$
x_1	1		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3-a}{2}$

目的関数の係数がすべて非負となったので，最適である．最適解は $x_1 = \frac{3-a}{2}$, $x_2 = \frac{3(a-1)}{2}$ $(x_3 = 0,\ x_4 = 0)$, $z = -\frac{a+3}{2}$.

(iii) 双対問題は

$$
\begin{aligned}
&ay_1 + 3y_2 \to \min \\
&y_1 + 3y_2 \ge 2 \\
&y_1 + \ y_2 \ge 1 \\
&y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

2 段階法の途中のプロセスについては省略（答案では省略しないこと）．シンプレックス表の最初の部分は,

基底	y_1	y_2	y_3	y_4	定数
$-w$	-2	-4	1	1	-3
$-z$	a	3			0
x_5	1	3	-1		2
x_6	1	1		-1	1

2. 線形計画問題

$$
\begin{aligned}
&c_1x_1 + c_2x_2 \to \max \\
&\alpha x_1 + \beta x_2 \le b_1 \\
&\gamma x_1 + \delta x_2 = b_2 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

の双対問題を示せ．ただし，変数 y_1, y_2 を用い，目的関数が $b_1y_1 + b_2y_2 \to \min$ となるように変形すること．

(解答) 標準形は

$$
[-c_1, -c_2, 0][x_1, x_2, x_3]^\top \to \min
$$

$$
\begin{bmatrix} -\alpha & -\beta & -1 \\ -\gamma & -\delta & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
= -\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}
$$

$$
[x_1, x_2, x_3]^\top \ge \mathbf{0}
$$

この双対問題は

$$
-b_1y_1 - b_2y_2 \to \max
$$

$$
\begin{bmatrix} -\alpha & -\gamma \\ -\beta & -\delta \\ -1 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}
\le
\begin{bmatrix} -c_1 \\ -c_2 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

これを整理すると

$$b_1y_1 + b_2y_2 \to \min$$
$$\alpha y_1 + \gamma y_2 \geq c_1$$
$$\beta y_1 + \delta y_2 \geq c_2$$
$$y_1 \geq 0$$

3. 線形計画問題

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + x_2 \to \max \\ & \quad 3x_1 + x_2 \leq 10 \\ & \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 16 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

およびその双対問題をともに解いて，それらの解の間の関係を述べよ．

(解答)

標準形については略す．答案では省略せずに明記すること．

基底	x_1	x_2	x_3	x_4	定数
$-z$	$\underline{-2}$	-1			0
x_3	$\boxed{3}$	1	1		10
x_4	2	3		1	16
$-z$		$\underline{-\frac{1}{3}}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{20}{3}$
x_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{10}{3}$
x_3		$\boxed{\frac{7}{3}}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{28}{3}$
$-z$			$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	8
x_1	1		$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	2
x_2		1	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	4

目的関数の係数がすべて非負となったので，最適である．最適解は $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$) , $z = -8$. もとの問題の最適値は 8.

双対問題は栄養問題で

$$z = 10y_1 + 16y_2 \to \min$$
$$3y_1 + 2y_2 \geq 2$$
$$y_1 + 3y_2 \geq 1$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

標準形と人工変数の導入については略し，シンプレックス表のみ記す．答案では省略せずに明記すること．

基底	y_1	y_2	y_3	y_4	定数
$-w$	$\underline{-4}$	-5	1	1	-3
$-z$	10	16			0
y_5	$\boxed{3}$	2	-1		2
y_6	1	3		-1	1
$-w$		$\underline{-\frac{7}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$
$-z$		$\frac{28}{3}$	$\frac{10}{3}$		$-\frac{20}{3}$
y_1	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$
y_6		$\boxed{\frac{7}{3}}$	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$
$-w$					0
$-z$			2	4	-8
y_1	1		$-\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$
y_2		1	$\frac{1}{7}$	-$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$

目的関数 $w = 0$ となったので，もとの問題は実行可能．かつ，z の係数がすべて非負となったので，最適である．最適解 $y_1 = \frac{4}{7}$, $y_2 = \frac{1}{7}$, ($y_3 = y_4 = 0$), $z = 8$.

もとの問題と双対問題の最適値が 8 と一致する．また，それぞれの最適解が対応する他の問題の目的関数の係数に現れていることに注意する．