解答 (2015/04/27)

1. 線形計画問題

$$\begin{aligned} &c_1x_1 + c_2x_2 \to \max \\ &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ &x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

を標準形にせよ．行列形式で表したときの行列とベクトルを求めよ．
(解答) $x_1 = x_1^+ - x_1^-$, $x_1^+ \geq 0$, $x_1^- \geq 0$. とし，不等号を等号に置き換えるため，変数 $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ を用いると，

$$\begin{aligned} &z = -c_1(x_1^+ - x_1^-) - c_2x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \min \\ &a_{11}(x_1^+ - x_1^-) + a_{12}x_2 - x_3 = b_1 \\ &a_{21}(x_1^+ - x_1^-) + a_{22}x_2 + x_4 = b_2 \\ &x_1^+ \geq 0,\ x_1^- \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

これを

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \to \min \\ &A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ &\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

と書くと，

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{c}^\top = [-c_1, c_1, -c_2, 0, 0] \\ &A = \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{11} & a_{12} & -1 & 0 \\ a_{21} & -a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\boldsymbol{x}^\top = [x_1^+, x_1^-, x_2, x_3, x_4] \\ &\boldsymbol{b}^\top = [b_1, b_2] \end{aligned}$$

2. 次の線形計画問題を解け．

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 \to \max \\ &x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ &3x_1 + x_2 \leq 7 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

標準形については略すが，**答案では省略せずに記すこと．**

基底	x_1	x_2	x_3	x_4	定数
$-z$	-1	$\underline{-2}$			0
x_3	1	$\boxed{3}$	1		5
x_4	3	1		1	7
$-z$	$\underline{-\frac{1}{3}}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{10}{3}$
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$		$\frac{5}{3}$
x_4	$\boxed{\frac{8}{3}}$		$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{16}{3}$
$-z$			$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	4
x_2		1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	1
x_1	1		$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	2

目的関数の係数がすべて非負となったので，最適である．最適解は $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $(x_3 = x_4 = 0)$, $z = -4$. もとの最大化問題の最適値は $+4$ となる．

3. 図的解法により確認すれば良い。

4. 省略