

解答 (2015/04/20 宿題の問題 2)

問1は、簡単な計算問題なので、解答は省略する。

2. 生産計画型の問題

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \rightarrow \max$$

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

について、実行可能でない例と、実行可能だが、最適解が存在しない例を作れ。

(解答)

実行可能でない例 1:

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 \leq -1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

実行可能でない例 2:

$$x_1 \rightarrow \max$$

$$x_2 \leq -1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

実行可能で最適解が存在しない例 1:

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

実行可能で最適解が存在しない例 2:

$$x_1 \rightarrow \max$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

注: 生産計画型の問題

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \rightarrow \max$$

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

において一般に $A, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は非負とは限らない。しかしながら、計算問題では、これらは非負である。

また、 $a_{ij} > 0, \mathbf{b} > \mathbf{0}, \mathbf{c} > \mathbf{0}$ とすべての係数、定数が正ならば、問題は実行可能であり、最適解も存在することが証明できる。証明には、双対性(後述)の議論を用いるのが簡単である。