ソフトコンピューティングI, No.5
(Soft Computing I - No.5)

宮本 定明

Spring AB, 2015

ラフ集合

ラフ集合（rough sets）はポーランドの Z.Pawlak によって 1982 年に提唱された．ファジィ集合と対比させてみると次のようになる．

論理体系との関係

- ラフ集合 — — — 様相論理
- ファジィ集合 — — — ファジィ論理

主な応用

- ラフ集合 — — — 知識発見
- ファジィ集合 — — — ファジィ制御

ラフ集合からファジィ集合を導くことができる．逆はできない．

Rough sets

Rough sets was proposed by Z. Pawlak (1982). When we compare it with fuzzy sets, we note the following.

Relation to logical systems

- rough sets — — — modal logic
- fuzzy sets — — — fuzzy logic

Applications

- rough sets — — — knowledge discovery
- fuzzy sets — — — fuzzy control

Fuzzy sets can be derived from rough sets, but the converse derivation cannot be done.

ラフ近似

X を有限または可算な全体集合とする．$\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \cdots, U_K\}$ $(U_i \subseteq X)$ を X の分割，すなわち

$$\bigcup_{i=1}^{K} U_i = X, \qquad U_i \cap U_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

とする．このとき，X の同値関係 R で，分割 $\mathcal{U}$ と等価になるものがある．

注意． R が同値関係であるとは，次の (i),(ii),(iii) が満たされることである．

$$\begin{array}{ll} \text{(i)(反射律)} & xRx, \quad \text{for all } x \in X \\ \text{(ii)(対称律)} & xRy \Rightarrow yRx \\ \text{(iii)(推移律)} & xRy,\ yRz \Rightarrow xRz \end{array}$$

R は，$x, y \in X$ が同じ U_i に属するとき，xRy，違う U_i, U_j について $x \in U_i$, $y \in U_j$ なるとき，$x \not{R} y$ と定義すればよい．

Rough approximations

Let X be a finite or countable infinite universal set, and $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \cdots, U_K\}$ $(U_i \subseteq X)$ be a partition of X:

$$\bigcup_{i=1}^{K} U_i = X, \qquad U_i \cap U_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

Then there exists an equivalence relation R that is equivalent to $\mathcal{U}$: R is defined as follows: If $x, y \in X$ belong to the same U_i, then xRy, $x \in U_i$, $y \in U_j$ for different U_i, U_j, then $x \not R y$.

Note: An equivalence relation R satisfies the next (i),(ii), and (iii):

$$\text{(i)(reflexivity)} \ \ xRx, \quad \text{for all } x \in X$$
$$\text{(ii)(symmetry)} \ \ xRy \ \Rightarrow \ yRx$$
$$\text{(iii)(transitivity)} \ \ xRy, \ yRz \ \Rightarrow \ xRz$$

ラフ近似–つづき

逆に，同値関係 R が与えられたとき，$[x]_R = \{ y \in X : xRy \}$ と定義すると，$[x]_R$, $x \in X$ の全体は分割になる．このようにして得られた分割を $\mathcal{U} = X/R$ と書き，R による X の商集合と呼ぶ．

集合 $A \subseteq X$ が与えられたとき，

$$
\begin{aligned}
R^*(A) &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_i \{ U_i \in \mathcal{U} : U_i \cap A \neq \emptyset \} \\
R_*(A) &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_i \{ U_i \in \mathcal{U} : U_i \subseteq A \}
\end{aligned}
$$

と定義する．$R^*(A)$ を A の上近似，$R_*(A)$ を A の下近似と呼ぶ．
明らかに

$$
R_*(A) \subseteq A \subseteq R^*(A) \tag{1}
$$

式 (2) において等号が成り立つとき，A を R-exact，等号が成り立たないとき，A を R-rough という．

Rough approximations – No.2

When an equivalence relation R is given, we define $[x]_R = \{ y \in X : xRy \}$ Then the collection of all $[x]_R$, $x \in X$ is a partition of X (proof is omitted). The partition thus obtained is written as $\mathcal{U} = X/R$ and called quotient set of X by R.

Let $A \subseteq X$ be a given (crisp) set. Define

$$R^*(A) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_i \{ U_i \in \mathcal{U} : U_i \cap A \neq \emptyset \}$$

$$R_*(A) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_i \{ U_i \in \mathcal{U} : U_i \subseteq A \}$$

$R^*(A)$ is called the upper approximation of A, and $R_*(A)$ is called the lower approximation of A. The next relation is obvious:

$$R_*(A) \subseteq A \subseteq R^*(A) \tag{2}$$

When the equalities hold in (2), A is called R-exact. When the equality does not hold, A is called R-rough.

ラフ近似–つづき (Properties of rough sets)

次の関係が成り立つ (the followings hold).

$$
\begin{aligned}
R^*(\bar{A}) &= \overline{R_*(A)}, & R_*(\bar{A}) &= \overline{R^*(A)} \\
R^*(A \cup B) &= R^*(A) \cup R^*(B), & R_*(A \cup B) &\supseteq R_*(A) \cup R_*(B) \\
R^*(A \cap B) &\subseteq R^*(A) \cap R^*(B), & R_*(A \cap B) &= R_*(A) \cap R_*(B)
\end{aligned}
$$

様相論理とラフ集合

次のように対応させる.

X：対象の集合 – – – 可能世界に対応

R：同値関係 – – – KT5 体系の可到達関係

A：集合 – – – 命題 A に対応，$A = \|\mathrm{A}\|$ （命題 A が真である世界）.

$\mathcal{M} = (W, R, P)$ とする.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}, k \models \Diamond\,\mathrm{A} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{for some } k',\ kRk',\ \mathcal{M}, k' \models \mathrm{A} \\ &\Longleftrightarrow \quad k \in R^*(\|\mathrm{A}\|) = R^*(A)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}, k \models \Box\,\mathrm{A} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{for every } k',\ kRk',\ \mathcal{M}, k' \models \mathrm{A} \\ &\Longleftrightarrow \quad k \in R_*(\|\mathrm{A}\|) = R_*(A)\end{aligned}$$

このように，$\Diamond$ は上近似，$\Box$ は下近似に対応している.

Modal logic and rough sets

The following correspondence is used:

- X : the set of objects – corresponds to the set of possible worlds.
- R : equivalence relation – accessibility relation in KT5 system.
- A : a set – corresponds to a proposition A: $A = \|\mathrm{A}\|$ ($\|\mathrm{A}\|$ is the set of possible worlds where A is true.).

Let $\mathcal{M} = (W, R, P)$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, k \models \Diamond \mathrm{A} &\iff \text{for some } k',\ kRk',\ \mathcal{M}, k' \models \mathrm{A} \\ &\iff k \in R^*(\|\mathrm{A}\|) = R^*(A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, k \models \Box \mathrm{A} &\iff \text{for every } k',\ kRk',\ \mathcal{M}, k' \models \mathrm{A} \\ &\iff k \in R_*(\|\mathrm{A}\|) = R_*(A) \end{aligned}$$

Thus $\Diamond$ corresponds to the upper approximation, and $\Box$ to the lower approximation.

ラフ集合の一般化

R を反射的かつ対称的であるが，必ずしも推移的とは限らない関係とする．次のように定義する．

$$R^*(A) \overset{\text{def}}{=} \bigcup \{\, x \in X \ : \ \exists y \in A,\ yRx \,\}$$

$$R_*(A) \overset{\text{def}}{=} \bigcup \{\, x \in X \ : \ \forall y,\ xRy \Rightarrow y \in A \,\}$$

R が反射的だから，$R_*(A) \subseteq A \subseteq R^*(A)$.
前と同様の関係

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}, k \models \Diamond\, \mathrm{A} &\iff \text{for some } k',\ kRk',\ \mathcal{M}, k' \models \mathrm{A} \\
&\iff k \in R^*(\|\mathrm{A}\|) = R^*(A) \\
\mathcal{M}, k \models \Box\, \mathrm{A} &\iff \text{for every } k',\ kRk',\ \mathcal{M}, k' \models \mathrm{A} \\
&\iff k \in R_*(\|\mathrm{A}\|) = R_*(A)
\end{aligned}$$

が成り立つ．

Generalized rough sets

Let R be reflexive and symmetric, but not necessarily transitive. We define as follows.

$$R^*(A) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \{\, x \in X \ : \ \exists y \in A,\ yRx \,\}$$
$$R_*(A) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \{\, x \in X \ : \ \forall y,\ xRy \Rightarrow y \in A \,\}$$

Since R is reflexive, $R_*(A) \subseteq A \subseteq R^*(A)$.
The same relations as above hold:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}, k \models \Diamond \mathrm{A} &\iff \text{for some } k',\ kRk',\ \mathcal{M}, k' \models \mathrm{A} \\
&\iff k \in R^*(\|\mathrm{A}\|) = R^*(A) \\
\mathcal{M}, k \models \Box \mathrm{A} &\iff \text{for every } k',\ kRk',\ \mathcal{M}, k' \models \mathrm{A} \\
&\iff k \in R_*(\|\mathrm{A}\|) = R_*(A)
\end{aligned}$$