ソフトコンピューティング No.4
(Soft Computing I - No.4)

宮本 定明

Spring AB, 2015

ファジィ論理と可能性理論

ファジィ集合論の提唱者が Lotfi A. Zadeh であることはよく知られている（L.A.Zadeh: Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8, 338–353, 1965）．しかしながら，ファジィ論理については，Zadeh によって作られたということはできない．

- J.Łukasiewicz による無限値論理（1922）はファジィ論理を先取りしている．
- Heyting（1930,1966）らによる直観主義論理の一種としてファジィ論理を考察することが可能である（千谷,1992）．

Fuzzy logic and possibility theory

It is well-known that L.A. Zadeh propsed fuzzy set theory (L.A. Zadeh: Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8, 338–353, 1965). But fuzzy logic is actually far older.

- J.Łukasiewicz proposed infinite-valued logic (1922).
- Heyting(1930,1966) and others proposed intuitionistic logic. Fuzzy logic can be regarded as a subclass of intuitionistic logic (Titani, 1992).

Zadeh によるファジィ集合論

ある全体集合 X において「ある性質 A をもつ要素の集まり」を部分集合 A（性質 A と同じ記号を用いる）として規定する．ところが，現実世界では，ある要素が性質 A をみたすかどうかはあいまいであることが多い．

例．
X: 非負の実数の集合
性質 A：X の要素 x cm について，身長 x cm は「背が高い」．

このようなあいまいな状況を表現する「集合のようなもの」がファジィ集合．

- B を通常の集合とすると，集合 B は特性関数

$$f_B(x) = \begin{cases} 1 & (x \in B) \\ 0 & (x \notin B) \end{cases}$$

で完全に決定される．

Fuzzy sets by Zadeh

A set A of X is 'a collection of objects that satisfy a particular property A.' which is wriiten as A (using the same symbol as property A). In real world, however, it is frequently ambiguous that an element satisfies a property.

Example
X: the set of all nonnegative real numbers
Property A : height x cm means 'tall' $(x \in X)$.

Such an ambiguous situation can be expressd by a fuzzy set that is a set-like existence.

- Let B an ordinary set. Then B can be represented by its characteristic function

$$f_B(x) = \begin{cases} 1 & (x \in B) \\ 0 & (x \notin B) \end{cases}$$

ファジィ集合

A はあいまいな性質を表すものとする．特性関数の一般化として，メンバーシップ関数 $\mu_A(x)$：

$$0 \leq \mu_A(x) \leq 1, \qquad \text{for all} \quad x \in X$$

を考え，$\mu_A(x)$ が「x のファジィ集合 A への帰属度」を表すものと解釈する．

例． X：非負の実数とし，A: 年齢が「若い」．そこで，$\mu_A(x)$ を別紙の図のように定める．これによれば，２０才以下は完全に若く，２０才〜５０才は $\mu_A(x)$ によって若さの度合いが減少，５０才以上は，全く若くない．

$\mu_A(x)$：ある性質 A のラベルをもち，ラベル A が集合であるかのように扱う．
従って，$\mu_A(x), \mu_B(x), \ldots$ の $A, B, \ldots$ に集合演算などができなければならない．

Fuzzy set

Let A a property for which objects may have ambigous correspondence. As a generalization of a characteristic function, a membership function $\mu_A(x)$:

$$0 \leq \mu_A(x) \leq 1, \qquad \text{for all} \ \ x \in X$$

is considered, where $\mu_A(x)$ is interpreted as the degree of belongingness of x to *fuzzy set* A.

Example X : nonnegative real numbers.
A: age is 'young'. $\mu_A(x)$ is determined by the figure in the separate sheet. Thus an age under 20 is completely young, and the degree of being young is decreased as the age increases, and an age over 50 is not young at all.

$\mu_A(x)$: function having the label of a property A and label A is regarded as something like a set.
Hence we have to define set operations for labels $A, B, \ldots$ using functions $\mu_A(x), \mu_B(x), \ldots$.

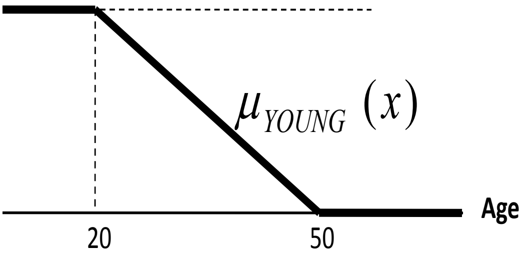

Figure: A fuzzy set $A = YOUNG$

ファジィ集合の関係と演算

- (1)[包含関係] $A \subseteq B \overset{\text{def}}{\iff} \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \quad \text{for all } x \in X.$
- (2)[相等関係] $A = B \overset{\text{def}}{\iff} \mu_A(x) = \mu_B(x), \quad \text{for all } x \in X.$
- (3)[補集合] $\mu_{\bar{A}}(x) \overset{\text{def}}{=} 1 - \mu_A(x).$
- (4)[合併] $\mu_{A \cup B}(x) \overset{\text{def}}{=} \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$
- (5)[共通部分] $\mu_{A \cap B}(x) \overset{\text{def}}{=} \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$
- (6)[α–カット] $A_\alpha \overset{\text{def}}{=} \{\, x \in X \,:\, \mu_A(x) \geq \alpha \,\}$
- (7)[強 α–カット] $A_{\bar{\alpha}} \overset{\text{def}}{=} \{\, x \in X \,:\, \mu_A(x) > \alpha \,\}$

Relations and operations for fuzzy sets

- (1)[inclusion] $A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \quad \text{for all } x \in X.$
- (2)[equality] $A = B \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mu_A(x) = \mu_B(x), \quad \text{for all } x \in X.$
- (3)[complement] $\mu_{\bar{A}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \mu_A(x).$
- (4)[union] $\mu_{A \cup B}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$
- (5)[intersection] $\mu_{A \cap B}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$
- (6)[α–cut (weak α–cut)] $A_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \in X \,:\, \mu_A(x) \geq \alpha \,\}$
- (7)[strong α–cut] $A_{\bar{\alpha}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \in X \,:\, \mu_A(x) > \alpha \,\}$

ファジィ集合の性質

X のファジィ集合 A, B について，包含関係 $A \subseteq B$ によって順序関係を定めるものとする．このとき，X のファジィ集合全体のなす集合（これを $[0,1]^X$ と書くことがある）は $\subseteq$ によって半順序集合となる．

(A) $A \cup B$ は A と B を含む最小のファジィ集合である．いいかえれば，$C \supseteq A$, $C \supseteq B$ を満たす任意のファジィ集合 C に対して $C \supseteq A \cup B$ が成り立つ．

(B) $A \cap B$ は A と B に含まれる最大のファジィ集合である．いいかえれば，$D \subseteq A$, $D \subseteq B$ を満たす任意のファジィ集合 D に対して $D \subseteq A \cap B$ が成り立つ．

(C) 通常の集合 E はその特性関数 $f_E(x)$ をメンバーシップ関数と同一視することによって，ファジィ集合とみなすことができる．

$$\mu_E(x) = f_E(x), \quad \text{for all } x \in X$$

Properties of fuzzy sets

Let the ordering of fuzzy sets A, B of X be defined by the inclusion $A \subseteq B$. Then the collection of all fuzzy sets of X (sometimes written $[0,1]^X$) is a partially ordered set with $\subseteq$.

(A) $A \cup B$ is the smallest fuzzy set that includes both A and B. In other words, for an arbitrary fuzzy set C such that $C \supseteq A$, $C \supseteq B$, $C \supseteq A \cup B$ holds.

(B) $A \cap B$ is the largest fuzzy set that is included in both A and B. In other words, for an arbitrary fuzzy set D such that $D \subseteq A$, $D \subseteq B$, $D \subseteq A \cap B$ holds.

(C) An ordinary (non fuzzy) set E is a particular case of fuzzy set by regarding its characteristic function$f_E(x)$ as the mebership function:

$$\mu_E(x) = f_E(x), \quad \text{for all } x \in X$$

ファジィ集合の性質(続き)

(D) ファジィ集合 A, B, C に対して，交換法則，結合法則，分配法則，ド・モルガン法則が成立する．

$$
\begin{aligned}
A \cup B = B \cup A, &\qquad A \cap B = B \cap A \\
(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), &\qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\
(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), &\qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \\
\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}, &\qquad \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}
\end{aligned}
$$

(E) α-カットと集合の関係，演算について次の性質がある．

- $A \subseteq B \iff A_\alpha \subseteq B_\alpha, \ \text{for all } \alpha \in [0,1]$
- $A = B \iff A_\alpha = B_\alpha, \ \text{for all } \alpha \in [0,1]$
- $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$
- $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$

(F) A, C をそれぞれ全体集合 X, Y のファジィ集合とするとき，直積 $A \times C$ は

$$
\mu_{A\times C}(x,y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}
$$

で定義される．

$$
(A \times C)_\alpha = A_\alpha \times C_\alpha
$$

が成立する．

Properties of fuzzy sets

(D)

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A, & A \cap B &= B \cap A \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), & (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C), & (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \\ \overline{(A \cup B)} &= \bar{A} \cap \bar{B}, & \overline{(A \cap B)} &= \bar{A} \cup \bar{B} \end{aligned}$$

(E)

- $A \subseteq B \iff A_\alpha \subseteq B_\alpha, \ \text{for all } \alpha \in [0,1]$
- $A = B \iff A_\alpha = B_\alpha, \ \text{for all } \alpha \in [0,1]$
- $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$
- $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$

(F) Let A be a fuzzy set of X and C be a fuzzy set of Y. Then the Cartesian product $A \times C$ is defined by

$$\mu_{A \times C}(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$$

We have

$$(A \times C)_\alpha = A_\alpha \times C_\alpha$$

ファジィ集合の像

X, Y を 2 つの全体集合とし，f を X で定義され，Y に値をとる関数とする（$f\colon X \to Y$）．A を X のファジィ集合，C を Y のファジィ集合とする．f による C の原像 $f^{-1}(C)$ を

$$\mu_{f^{-1}(C)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_C(f(x))$$

で定義する．
一方，f による A の像の定義はより複雑である．最も自然な方法により

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in A} \{f(x)\}$$

と定義する．メンバーシップ関数で書けば，

$$\mu_{f(A)}(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) & (y \in f(X)) \\ 0 & (y \notin f(X)) \end{cases}$$

$f(A)$ の定め方は拡張原理と呼ばれている．

Image of fuzzy set

Let X and Y be two universal sets, and f be a function defined on X with values in Y ($f : X \to Y$). Assume that A is a fuzzy set of X and C is a fuzzy set of Y. The inverse image $f^{-1}(C)$ of C by f is defined by

$$\mu_{f^{-1}(C)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_C(f(x))$$

The image of A by f is more complicated: Naturally,

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in A} \{f(x)\}$$

Using membership function,

$$\mu_{f(A)}(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) & (y \in f(X)) \\ 0 & (y \notin f(X)) \end{cases}$$

This definition of $f(A)$ is called the extension principle.

ファジィ集合の像(続き)

A, B を X のファジィ集合，C, D を Y のファジィ集合とするとき，次式が成立つ.

$$
\begin{aligned}
f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B) \\
f(A \cap B) &\subseteq f(A) \cap f(B) \\
f^{-1}(C \cup D) &= f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \\
f^{-1}(C \cap D) &= f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)
\end{aligned}
$$

強 α-カットと f の間には

$$
\begin{aligned}
f(A_{\bar{\alpha}}) &= f(A)_{\bar{\alpha}} \\
f^{-1}(C_{\bar{\alpha}}) &= f^{-1}(C)_{\bar{\alpha}}
\end{aligned}
$$

の関係がある.

Image of fuzzy set

Let A, B be fuzzy sets of X, and let C, D be fuzzy sets of Y. We have

$$\begin{aligned} f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B) \\ f(A \cap B) &\subseteq f(A) \cap f(B) \\ f^{-1}(C \cup D) &= f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \\ f^{-1}(C \cap D) &= f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \end{aligned}$$

The strong α-cut and f has the following relation:

$$\begin{aligned} f(A_{\bar{\alpha}}) &= f(A)_{\bar{\alpha}} \\ f^{-1}(C_{\bar{\alpha}}) &= f^{-1}(C)_{\bar{\alpha}} \end{aligned}$$

ファジィ集合の記法

特に，X が有限集合 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ である場合，$\mu_X(x_i) = a_i$ で表されるファジィ集合を

$$A = \sum_i a_i|x_i = a_1|x_1 + a_2|x_2 + \cdots + a_n|x_n$$

あるいは

$$A = \{(x_1, a_1), (x_2, a_2), \cdots, (x_n, a_n)\}$$

のように書き表す．また，$a_i = 0$ のとき，簡単のため，$a_i|x_i$ あるいは (x_i, a_i) を省略することができる．たとえば，$X = \{a, b, c\}$, $\mu_A(a) = 0.5$, $\mu_A(b) = 0$, $\mu_A(c) = 0.9$ ならば，$A = 0.5|a + 0.9|c$, あるいは $A = \{(a, 0.5), (c, 0.9)\}$ と書かれる．

A simplified notation for fuzzy sets

Let X be a finite set: $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. When $\mu_X(x_i) = a_i$, we can write

$$A = \sum_i a_i|x_i = a_1|x_1 + a_2|x_2 + \cdots + a_n|x_n$$

or

$$A = \{(x_1, a_1), (x_2, a_2), \cdots, (x_n, a_n)\}$$

When $a_i = 0$, we omit $a_i|x_i$ or (x_i, a_i).
For example, let $X = \{a, b, c\}$, and $\mu_A(a) = 0.5$, $\mu_A(b) = 0$, $\mu_A(c) = 0.9$. We can write $A = 0.5|a + 0.9|c$, or $A = \{(a, 0.5), (c, 0.9)\}$

ファジィ論理

いま，命題 $p, q, \ldots$ の真理値が 0, 1, および 0 と 1 の間の値もとるものとし，p の真理値を $V(p)$ で表す．$0 \le V(p) \le 1$ である．
ファジィ集合との類推によれば，次のように考えられる．

- $V(\neg p) = 1 - V(p)$
- $V(p \vee q) = \max\{V(p), V(q)\}$
- $V(p \wedge q) = \min\{V(p), V(q)\}$
- $V(p \to q) = \max\{1 - V(p), V(q)\}$

Łukasiewicz の論理Łukasiewicz の論理では，次のように真理値が定義される．

- (i) $V(\neg p) = 1 - V(p)$
- (ii) $V(p \to q) = \min\{1, 1 - V(p) + V(q)\}$
- (iii) $V(p \vee q) = \max\{V(p), V(q)\}$
- (iv) $V(p \wedge q) = V(\neg(\neg p \vee \neg q)) = \min\{V(p), V(q)\}$

Fuzzy logic

Assume that the truth values of $p, q, \ldots$ can take real values between 0 and 1. The truth value of p (valuation) is denoted by $V(p)$ $(0 \leq V(p) \leq 1)$

By analogy with fuzzy sets, we can define

- $V(\neg p) = 1 - V(p)$
- $V(p \vee q) = \max\{V(p), V(q)\}$
- $V(p \wedge q) = \min\{V(p), V(q)\}$
- $V(p \to q) = \max\{1 - V(p), V(q)\}$

Actually, the last implication is not generally used.

Łukasiewicz logic By Łukasiewicz logic, the following definition is used:

- (i) $V(\neg p) = 1 - V(p)$
- (ii) $V(p \to q) = \min\{1, 1 - V(p) + V(q)\}$
- (iii) $V(p \vee q) = \max\{V(p), V(q)\}$
- (iv) $V(p \wedge q) = V(\neg(\neg p \vee \neg q)) = \min\{V(p), V(q)\}$

直観主義ファジィ論理

まず,

- (1) $V(p \vee q) = \max\{V(p), V(q)\}$
- (2) $V(p \wedge q) = \min\{V(p), V(q)\}$

とする．次に，$V(p \to q)$ の真理値を決めるため，次の原則 **(I),(II)** を定める．

(I) $V(p \to q) = 1 \iff V(p) \leq V(q)$

(II) $V(p \to (q \to r)) = V(p \wedge q \to r)$

(I),(II) から

- (3)

$$V(p \to q) = \begin{cases} 1 & (V(p) \leq V(q)) \\ V(q) & (V(p) > V(q)) \end{cases}$$

Intuitionistic fuzzy logic

Define

- (1) $V(p \vee q) = \max\{V(p), V(q)\}$
- (2) $V(p \wedge q) = \min\{V(p), V(q)\}$

Then, to determine $V(p \to q)$, the following two properties are assumed:

(I) $V(p \to q) = 1 \iff V(p) \leq V(q)$

(II) $V(p \to (q \to r)) = V(p \wedge q \to r)$

From **(I),(II)**, we have

- (3)

$$V(p \to q) = \begin{cases} 1 & (V(p) \leq V(q)) \\ V(q) & (V(p) > V(q)) \end{cases}$$

(the proof is omitted.)

直観主義ファジィ論理 (English omitted.)

述語論理では，変数 $x, y, \cdots$ を含む $p(x), q(y, z), \cdots$ などの式を考える．また，論理記号 $\forall$（すべての），$\exists$（存在する）を扱う．そこで，変数 x が集合 M の値をとるとき，

- (4) $V(\forall x\, p(x)) = \inf_{x \in M} V(p(x))$
- (5) $V(\exists x\, p(x)) = \sup_{x \in M} V(p(x))$

と定義する．さらに，

$$\neg p \stackrel{\text{def}}{=} p \to \perp \qquad (p \text{ とすると矛盾が生じる})$$

と定義する（$\perp$ は恒偽記号で $V(\perp) = 0$）．(3) から，

$$V(\neg p) = \begin{cases} 1 & (V(p) = 0) \\ 0 & (V(p) > 0) \end{cases}$$

となり，先に述べた 2 つのファジィ論理における $V(\neg p) = 1 - V(p)$ とは異なる定義となる．竹内，千谷（千谷，1992 参照）は上記の他に Łukasiewicz の含意，代数積 $V(p \cdot q) = V(p)V(q)$，$V(\sim p) = 1 - V(p)$ による否定を含んだ公理的体系を提案し，それにもとづいて「直観主義的ファジィ集合」が展開されることを示している．

ファジィ測度

X を（可算な）全体集合とし，X の部分集合全体からなる集合を 2^X と書く．2^X 上で定義され，$[0,1]$ の値をとる関数 g ($g : 2^X \to [0,1]$) が次の (1),(2),(3) を満たすとき，g をファジィ測度 (fuzzy measure) と呼ぶ.

- (1) $g(\emptyset) = 0, \qquad g(X) = 1$
- (2) $A \subseteq B \ \Rightarrow \ g(A) \leq g(B)$
- (3) $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ あるいは $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ のとき,
$$\lim_{n\to\infty} g(A_n) = g(\lim_{n\to\infty} A_n)$$

任意のファジィ測度を g とするとき，(2) から

$$g(A \cup B) \geq \max\{g(A), g(B)\} \tag{1}$$
$$g(A \cap B) \leq \min\{g(A), g(B)\} \tag{2}$$

問. (3), (4) を証明せよ.

Fuzzy measures

X: universal set (either finite or countablly infinite).
2^X: the collection of all crisp (alias non-fuzzy) subsets of X.
g : a function defined on 2^X with values in $[0, 1]$ ($g : 2^X \to [0, 1]$)
When g satisfies the following (1),(2), and (3), g is called a *fuzzy measure*.

- (1) $g(\emptyset) = 0, \qquad g(X) = 1$
- (2) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; g(A) \leq g(B)$
- (3) Suppose $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ or $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, then

$$\lim_{n\to\infty} g(A_n) = g(\lim_{n\to\infty} A_n)$$

Let g be an arbitrary fuzzy measure, then we have

$$\begin{aligned} g(A \cup B) &\geq \max\{g(A), g(B)\} \qquad (3)\\ g(A \cap B) &\leq \min\{g(A), g(B)\} \qquad (4)\end{aligned}$$

Question. Prove (3) and (4).

可能性測度・必然性測度

式 (3) において常に等号が成り立つ測度を記号 Π で表し，可能性測度 (possibility measure) と呼ぶ.

$$\Pi(A \cup B) = \max\{\Pi(A), \Pi(B)\} \tag{5}$$

式 (4) において常に等号が成り立つ測度を記号 N で表し，必然性測度 (necessity measure) と呼ぶ.

$$N(A \cap B) = \min\{N(A), N(B)\} \tag{6}$$

Π を可能性測度とし,

$$\pi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Pi(\{x\})$$

とおくと,

$$\Pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x) \tag{7}$$

と表すことができる．この $\pi(x)$ を可能性分布 (possibility distribution) という.

Possibility measure and necessity measure

When the equality always holds in (3) for a particular measure, it is called a possibility measure; a possibility measure is frequently denoted by Π:

$$\Pi(A \cup B) = \max\{\Pi(A), \Pi(B)\} \tag{8}$$

When the equality always holds in (4) for a particular measure, it is called a necessity measure; a necessity measure is frequently denoted by N:

$$N(A \cap B) = \min\{N(A), N(B)\} \tag{9}$$

Let Π be a possibility measure and put $\pi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Pi(\{x\})$. We have

$$\Pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x) \tag{10}$$

The function $\pi(x)$ is called a possibility distribution.

可能性測度・必然性測度–その 2

Π が可能性測度であるとき，ファジィ測度 N を

$$N(A) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \Pi(\bar{A}) \tag{11}$$

と定義すると，N は必然性測度になる．なぜなら，

$$\begin{aligned} N(A \cap B) &= 1 - \Pi(\overline{A \cap B}) = 1 - \Pi(\bar{A} \cup \bar{B}) \\ &= 1 - \max\{\Pi(\bar{A}), \Pi(\bar{B})\} = \min\{1 - \Pi(\bar{A}), 1 - \Pi(\bar{B})\} \\ &= \min\{N(A), N(B)\} \end{aligned}$$

となり，(9) を満たすからである．

問． N を必然性測度とする．測度 Π を $\Pi(A) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - N(\bar{A})$ と定義すると，Π は可能性測度になることを示せ．

Possibility measures and necessity measures

Let Π be a possibility measure. We define a fuzzy measure N as follows.

$$N(A) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \Pi(\bar{A}) \tag{12}$$

Then N is a necessity measure, since

$$\begin{aligned} N(A \cap B) &= 1 - \Pi(\overline{A \cap B}) = 1 - \Pi(\bar{A} \cup \bar{B}) \\ &= 1 - \max\{\Pi(\bar{A}), \Pi(\bar{B})\} = \min\{1 - \Pi(\bar{A}), 1 - \Pi(\bar{B})\} \\ &= \min\{N(A), N(B)\} \end{aligned}$$

Thus, (9) holds.

Question. Let N be a necessity measure and define Π by $\Pi(A) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - N(\bar{A})$. Show that Π is a possibility measure.

可能性理論

この $\Pi(A)$, $N(A)$ をそれぞれ事象 A の生起する可能性と必然性の度合いと解釈するのが可能性理論である．

式 (12) において，$\pi(x)$ を Π の可能性分布とすると，

$$N(A) = 1 - \sup_{x \in \bar{A}} \pi(x) = \inf_{x \in \bar{A}} (1 - \pi(x)) \tag{13}$$

と表せる．
(12) で結ばれた Π と N についてつぎの関係が成り立つ．

$$\sup_{x \in X} \pi(x) = 1 \tag{14}$$

$$\Pi(A) + \Pi(\bar{A}) \geq 1 \tag{15}$$

$$N(A) + N(\bar{A}) \leq 1 \tag{16}$$

$$N(A) \leq \Pi(A) \tag{17}$$

$$N(A) > 0 \;\Rightarrow\; \Pi(A) = 1 \tag{18}$$

$$\Pi(A) < 1 \;\Rightarrow\; N(A) = 0 \tag{19}$$

Possibility theory

When we interprete $\Pi(A)$ and $N(A)$ as the possibility and necessity of event A, respectively, then we have the theory of possibility.

Let $\pi(x)$ be the possibility distribution of Π in (12). We then have

$$N(A) = 1 - \sup_{x \in \bar{A}} \pi(x) = \inf_{x \in \bar{A}} (1 - \pi(x)) \tag{20}$$

When (12) holds between Π and N, we have the following.

$$\sup_{x \in X} \pi(x) = 1 \tag{21}$$

$$\Pi(A) + \Pi(\bar{A}) \geq 1 \tag{22}$$

$$N(A) + N(\bar{A}) \leq 1 \tag{23}$$

$$N(A) \leq \Pi(A) \tag{24}$$

$$N(A) > 0 \;\Rightarrow\; \Pi(A) = 1 \tag{25}$$

$$\Pi(A) < 1 \;\Rightarrow\; N(A) = 0 \tag{26}$$

ファジィ事象の可能性

A を X のファジィ集合とし，$\pi(x)$ を可能性分布とするとき，$\Pi(A)$ を

$$\Pi(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} \min\{\pi(x), \mu_A(x)\} \tag{27}$$

と定義する．これから定義される $N(A)(= 1 - \Pi(\bar{A}))$ は

$$N(A) = \inf_{x \in X} \max\{(1 - \pi(x)), \mu_A(x)\} \tag{28}$$

と表される．

例． $E \subseteq X$ を通常の集合とする．

$$\Pi(A) = \begin{cases} 1 & (A \cap E \neq \emptyset) \\ 0 & (A \cap E = \emptyset) \end{cases}$$

$$N(A) = \begin{cases} 1 & (E \subseteq A) \\ 0 & (E \not\subseteq A) \end{cases}$$

とおけば，Π，N はそれぞれ可能性測度および必然性測度になる．

Possibility of a fuzzy event

Let A be a fuzzy set of X. $\pi(x)$ is a possibility distribution on X. $\Pi(A)$ is defined by

$$\Pi(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} \min\{\pi(x), \mu_A(x)\} \tag{29}$$

$N(A)$ $(= 1 - \Pi(\bar{A}))$ is accordingly given by

$$N(A) = \inf_{x \in X} \max\{(1 - \pi(x)), \mu_A(x)\} \tag{30}$$

Example. Let $E \subseteq X$ be a crisp set. Put

$$\Pi(A) = \begin{cases} 1 & (A \cap E \neq \emptyset) \\ 0 & (A \cap E = \emptyset) \end{cases}$$

$$N(A) = \begin{cases} 1 & (E \subseteq A) \\ 0 & (E \not\subseteq A) \end{cases}$$

Then Π and N are respectively a possibility measure and necessity measure.

例 (Example).

A を X のファジィ集合とし，Π を可能性測度とする．(For a fuzzy set A of X and a possibility measure Π, put)

$$[E]_\alpha = \{\, x \in X \;:\; \pi(x) \geq \alpha \,\}$$

とおく．このとき，(We then have)

$$\Pi(A) = \sup \{\, \alpha \;:\; [A]_\alpha \cap [E]_\alpha \neq \emptyset \,\}$$

区間演算

数 M, N が単一の数値の代わりに区間で表されているとする．すなわち $M = [m_1, m_2]$, $N = [n_1, n_2]$．このとき，等号，大小関係，max, min, 四則演算を次のように定義する．

- $M = N \iff m_1 = n_1,\ m_2 = n_2$.
- $M \leq N \iff m_1 \leq n_1,\ m_2 \leq n_2$.
- $\max\{M, N\} = [\max\{m_1, n_1\}, \max\{m_2, n_2\}]$.
- $\min\{M, N\} = [\min\{m_1, n_1\}, \min\{m_2, n_2\}]$.
- $M + N = [m_1 + n_1, m_2 + n_2]$.
- $M - N = [m_1 - n_2, m_2 - n_1]$.
- $M \times N = \{m \times n : m \in [m_1, m_2],\ n \in [n_1, n_2]\}$.
- $M/N = \{m/n : m \in [m_1, m_2],\ n \in [n_1, n_2]\}$. ただし，$0 \notin [n_1, n_2]$ とする．

Interval calculation

Assume two real intervals M, N: $M = [m_1, m_2]$, $N = [n_1, n_2]$. Equality, inequality, max, min, sum, subtraction, multiplication, and division are defined as follows:

- $M = N \iff m_1 = n_1, \; m_2 = n_2$.
- $M \leq N \iff m_1 \leq n_1, \; m_2 \leq n_2$.
- $\max\{M, N\} = [\max\{m_1, n_1\}, \max\{m_2, n_2\}]$.
- $\min\{M, N\} = [\min\{m_1, n_1\}, \min\{m_2, n_2\}]$.
- $M + N = [m_1 + n_1, m_2 + n_2]$.
- $M - N = [m_1 - n_2, m_2 - n_1]$.
- $M \times N = \{m \times n : m \in [m_1, m_2], \; n \in [n_1, n_2]\}$.
- $M/N = \{m/n : m \in [m_1, m_2], \; n \in [n_1, n_2]\}$. where $0 \notin [n_1, n_2]$.

ファジィ数

実数上のファジィ集合 N で，各 α カットが閉区間であり，かつ $\max_{x \in \mathbf{R}} \mu_N(x) = 1$ であるものをファジィ数と呼ぶ．

ファジィ数については，各 α カットが閉区間なので，その大小関係，max, min, 四則演算は区間演算で定義される．

- $M = N \iff [M]_\alpha = [N]_\alpha,\ \forall \alpha \in [0,1]$.
- $M \leq N \iff [M]_\alpha \leq [N]_\alpha,\ \forall \alpha \in [0,1]$.
- $[\max\{M, N\}]_\alpha = \max\{[M]_\alpha, [N]_\alpha\},\ \forall \alpha \in [0,1]$
- $[\min\{M, N\}]_\alpha = \min\{[M]_\alpha, [N]_\alpha\},\ \forall \alpha \in [0,1]$
- $[M + N]_\alpha = [M]_\alpha + [N]_\alpha,\ \forall \alpha \in [0,1]$.
- $[M - N]_\alpha = [M]_\alpha - [N]_\alpha,\ \forall \alpha \in [0,1]$.
- $[M \times N]_\alpha = [M]_\alpha \times [N]_\alpha,\ \forall \alpha \in [0,1]$.
- $[M/N]_\alpha = [M]_\alpha/[N]_\alpha,\ \forall \alpha \in [0,1]$. ただし，右辺の $[M]_\alpha/[N]_\alpha$ がすべての $\alpha \in [0,1]$ について定義できるときだけファジィ数 M/N が定義できるとする．

Fuzzy numbers

Let N be a fuzzy set of real numbers. If each α-cut is a closed interval and $\max_{x \in \mathbf{R}} \mu_N(x) = 1$, then N is called a *fuzzy number*.

For fuzzy numbers, their equality, inequality, max, min, sum, subtraction, multiplication, and division are defined by interval calculation:

- $M = N \iff [M]_\alpha = [N]_\alpha, \ \forall \alpha \in [0, 1].$
- $M \leq N \iff [M]_\alpha \leq [N]_\alpha, \ \forall \alpha \in [0, 1].$
- $[\max\{M, N\}]_\alpha = \max\{[M]_\alpha, [N]_\alpha\}, \ \forall \alpha \in [0, 1]$
- $[\min\{M, N\}]_\alpha = \min\{[M]_\alpha, [N]_\alpha\}, \ \forall \alpha \in [0, 1]$
- $[M + N]_\alpha = [M]_\alpha + [N]_\alpha, \ \forall \alpha \in [0, 1].$
- $[M - N]_\alpha = [M]_\alpha - [N]_\alpha, \ \forall \alpha \in [0, 1].$
- $[M \times N]_\alpha = [M]_\alpha \times [N]_\alpha, \ \forall \alpha \in [0, 1].$
- $[M / N]_\alpha = [M]_\alpha / [N]_\alpha, \ \forall \alpha \in [0, 1].$ where $[M]_\alpha / [N]_\alpha$ is assumed to be definable for every $\alpha \in [0, 1]$.

区間演算・ファジィ数と可能性

区間 M, N について

$$Pos(M = N) = \begin{cases} 1 & (M \cap N \neq \emptyset), \\ 0 & (M \cap N = \emptyset) \end{cases}$$

$$Pos(M \leq N) = \begin{cases} 1 & (\exists m \in M, \exists n \in N,\ m \leq n), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定義する．M, N がファジィ数の場合は,

$$Pos(M = N) = \max_{\alpha \in [0,1]} Pos([M]_\alpha = [N]_\alpha),$$
$$Pos(M \leq N) = \max_{\alpha \in [0,1]} Pos([M]_\alpha \leq [N]_\alpha),$$

と定義する．
区間確率や確率がファジィ数の場合，確率が等しい可能性などが,
上の式で計算される．

Interval calculation, fuzzy numbers, and possibility

For interval M, N, we define

$$Pos(M = N) = \begin{cases} 1 & (M \cap N \neq \emptyset), \\ 0 & (M \cap N = \emptyset) \end{cases}$$

$$Pos(M \leq N) = \begin{cases} 1 & (\exists m \in M, \exists n \in N,\ m \leq n), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

If M and N are fuzzy numbers, we define

$$Pos(M = N) = \max_{\alpha \in [0,1]} Pos([M]_\alpha = [N]_\alpha),$$
$$Pos(M \leq N) = \max_{\alpha \in [0,1]} Pos([M]_\alpha \leq [N]_\alpha),$$

When a probability is intervaal-valued, or fuzzy number-valued, then the possibility of two probabilities are equal, etc., are calculated.

Modal logic and possibility theory

This section is based on Miyamoto (1998). Assume $\mathcal{M}$ is a standard model, α is a possible world in $\mathcal{M}$, and v is a valuation:

$$\begin{aligned} v(A,\alpha) = 1 &\iff \mathcal{M},\alpha \models A \\ v(A,\alpha) = 0 &\iff Not(\mathcal{M},\alpha \models A) \end{aligned}$$

The set of worlds accessible from α is

$$R(\alpha) = \{\, \beta \in W \;:\; \alpha R \beta \,\}$$

We then have

$$\mathcal{M},\alpha \models \Box A \iff \forall \beta \in R(\alpha), v(A,\beta) = 1 \iff \inf_{\beta \in R(\alpha)} v(A,\beta) = 1 \tag{31}$$

$$\mathcal{M},\alpha \models \Diamond A \iff \exists \beta \in R(\alpha), v(A,\beta) = 1 \iff \sup_{\beta \in R(\alpha)} v(A,\beta) = 1 \tag{32}$$

Modal logic and possibility theory – No.2

Fix α and assume the world F accessible from α is a fuzzy set. The possibility of event A occurs is defined by

$$\Pi(A) = \sup_{\beta \in W} \min\{v(A, \beta), \mu_F(\beta)\} \tag{33}$$

(note $F = R(\alpha)$).
Suppose $R(\alpha)$ is non-fuzzy (crisp). The set of possible worlds where A is true is given by $\|A\|$ $(\|A\| = \{\beta \in W : \mathcal{M}, \beta \models A\})$.
We have

$$\Pi(A) = \sup_{\beta \in R(\alpha)} v(A, \beta) = \begin{cases} 1 & (R(\alpha) \cap \|A\| \neq \emptyset) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

Modal logic and possibility theory – No.3

Let F be a fuzzy set. For proposition A, B, wew have

$$\Pi(A \vee B) = \max\{\Pi(A), \Pi(B)\}$$

Moreover, note

$$\mathcal{M}, \alpha \models \Box A \iff Not(\mathcal{M}, \alpha \models \Diamond \neg A)$$

and we define

$$N(A) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \Pi(\neg A)$$

Since $v(\neg A, \beta) = 1 - v(A, \beta)$, we have

$$N(A) = \inf_{\beta \in W} \max\{v(A, \beta), \mu_{\bar{F}}(\beta)\}$$

余談–無知の知 と認識論理 (English omitted.)

無知の知 (Wikipedia 2010/5/14 引用)
「他人の無知を指摘することは簡単であるが言うまでもなく人間は世界の全てを知る事は出来ない。ギリシアの哲学者ソクラテスは当時、知恵者と評判の人物との対話を通して、自分の知識が完全ではない事に気がついている、言い換えれば無知である事を知っている点において、知恵者と自認する相手より僅かに優れていると考えた。また知らない事を知っていると考えるよりも、知らない事は知らないと考える方が優れている、とも考えた。
なお、論語にも『知るを知るとなし、知らざるを知らずとなす、これ知るなり』という類似した言及がある。」

4. $\mathcal{K}A \to \mathcal{K}\mathcal{K}A$ (知るを知るとなし)
5. $\neg\mathcal{K}A \to \mathcal{K}\neg\mathcal{K}A$ (知らざるを知らずとなす)

余談 2–夏目漱石「三四郎」より

男は例のごとく、にやにや笑っている。そのくせ言葉つきはどこまでもおちついている。どうも見当がつかないから、相手になるのをやめて黙ってしまった。すると男が、こう言った。
「熊本より東京は広い。東京より日本は広い。日本より……」でちょっと切ったが、三四郎の顔を見ると耳を傾けている。
「日本より頭の中のほうが広いでしょう」と言った。「とらわれちゃだめだ。いくら日本のためを思ったって贔屓の引き倒しになるばかりだ」
この言葉を聞いた時、三四郎は真実に熊本を出たような心持ちがした。同時に熊本にいた時の自分は非常に卑怯であったと悟った。
その晩三四郎は東京に着いた。髭の男は別れる時まで名前を明かさなかった。三四郎は東京へ着きさえすれば、このくらいの男は到るところにいるものと信じて、べつに姓名を尋ねようともしなかった。(第一章終)