ソフトコンピューティング, No.3
(Soft Computing I - No.3)

宮本 定明

Spring AB, 2015

様相論理

様相論理とは，元来，可能性と必然性を表現する論理の体系である．アリストテレスの時代から考察が始まり，ライプニッツ，カントなど，哲学の分野で研究されてきた．最近は，情報科学における知識や状態の遷移の表現などに広く用いられ，情報システムにおける基礎の役割を果たしている．大きく分けて，命題様相論理と述語様相論理の 2 種類があるが，ここでは，より単純な命題様相論理を扱う．

記号

様相論理における文 (sentence，論理式ともいう):

- $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots$ (原子文，これ以上分解できない文)
- $\top$(恒真記号), $\bot$(恒偽記号), A, B, C, $\ldots$
- $\neg A$ (A の否定), $A \wedge B$ (A および B), $A \vee B$ (A または B), $A \to B$ (A ならば B), $A \leftrightarrow B$ (A と B は等価), $\Box A$, $\Diamond A$.
    - $\Box A$：A は必然，necessarily A と読む
    - $\Diamond A$：A は可能，possibly A と読む

Modal Logic

Modal logic is a lgic system to represent possibility and necessity. Modal logic is said to be very old, its history begins from the era of Aristotle. Leibniz and Kant have studied modal logic. More recently, modal logic is used for representing knowledge and state transition in information sciences.
Modal logic can be divided into propositional modal logic and predicate modal logic. The former is simpler and discussed here.

Notations

Sentences, formulas:

- $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots$ (atomic sentences)
- $\top$(truth constant), $\bot$(falsity constant), A, B, C, $\ldots$
- $\neg A$ (negation of A), $A \wedge B$ (A and B), $A \vee B$ (A or B), $A \to B$ (if A then B), $A \leftrightarrow B$ (A and B are equivalent), $\Box A$, $\Diamond A$.
  - $\Box A$: A is necessary, necessarily A.
  - $\Diamond A$: A is possible, possibly A.

S5 体系

様相論理の意味付けには，様々なものがある．たとえば，

- $\mathcal{B}A$ (信念論理：$\mathcal{B}A$ は A を信じている，と読む)
- $\mathcal{K}A$ (知識論理：$\mathcal{K}A$ は A を知っている，と読む)
- $[\alpha]A$ (多様相論理：パラメータ α が記述する状況のもとでの必然性)

これらについては，後で述べる．まず，最も簡単な様相から考察する．

ライプニッツによる可能性と必然性の意味付け (S5 体系)

- $\Box A$(A は必然): A は「起こり得る世界（可能世界）」の至る所で成立する．
- $\Diamond A$(A は可能): A は「起こり得る世界（可能世界）」のどこかで成立する．

S5 system

There are different semantics of modal logic, e.g.,

- $\mathcal{B}A$ (Logic of belief：$\mathcal{B}A$ is read as A is believed)
- $\mathcal{K}A$ (Logic ofknowledge：$\mathcal{K}A$ is read as A is known)
- $[\alpha]A$ (multimodal logic：necessity in a situation described by parameter α)

We explain them later, and we begin from the simplest modal logic: これらについては，後で述べる．まず，最も簡単な様相から考察する．

S5 system:

- $\Box A$(A is necessary): A is true at every possible worlds.
- $\Diamond A$(A is possible): A is true at some possible worlds, not necessarily in this world.

様相論理の意味論 (S5 体系)

- W: 可能世界の集合, $W = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$
- $P_0, P_1, P_2, \ldots$: P_i は W の部分集合で，原子文 $\mathbf{P}_i$ が成立する可能世界の全体 ($i = 0, 1, 2, \ldots$),
- $P = \langle P_0, P_1, P_2, \ldots \rangle$.
- $\mathcal{M} = \langle W, P \rangle$: モデル

A が真: A がモデル $\mathcal{M}$ におけるある可能世界 α で真 $\Leftrightarrow \mathcal{M}, \alpha \models A$ (A is true at α in $\mathcal{M}$).

Semantics of S5 system

- W: the set of possible worlds: $W = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$
- $P_0, P_1, P_2, \dots$: P_i is a subset of W where $\mathbf{P}_i$ is true $(i = 0, 1, 2, \dots)$,
- $P = \langle P_0, P_1, P_2, \dots \rangle$.
- $\mathcal{M} = \langle W, P \rangle$: a model of S5 system.

A is true : A is true at a world α in the model $\mathcal{M} \Leftrightarrow \mathcal{M}, \alpha \models A$ (A is true at α in $\mathcal{M}$).

定義 (How to read is explained in the lecture)

定義の読み方は講義中に述べる．

(1) $\mathcal{M}, \alpha \models \mathbf{P}_n \Leftrightarrow \alpha \in P_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

(2) $\mathcal{M}, \alpha \models \top$.

(3) Not $\mathcal{M}, \alpha \models \perp$.

(4) $\mathcal{M}, \alpha \models \neg A \Leftrightarrow$ not $\mathcal{M}, \alpha \models A$.

(5) $\mathcal{M}, \alpha \models A \wedge B \Leftrightarrow$ both $\mathcal{M}, \alpha \models A$ and $\mathcal{M}, \alpha \models B$.

(6) $\mathcal{M}, \alpha \models A \vee B \Leftrightarrow$ either $\mathcal{M}, \alpha \models A$ or $\mathcal{M}, \alpha \models B$.

(7) $\mathcal{M}, \alpha \models A \to B \Leftrightarrow$ if $\mathcal{M}, \alpha \models A$ then $\mathcal{M}, \alpha \models B$.

(8) $\mathcal{M}, \alpha \models A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \mathcal{M}, \alpha \models A$ if and only if $\mathcal{M}, \alpha \models B$.

(9') $\mathcal{M}, \alpha \models \Box A \Leftrightarrow$ for every β in $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}, \beta \models A$.

(10') $\mathcal{M}, \alpha \models \Diamond A \Leftrightarrow$ for some β in $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}, \beta \models A$.

S5 体系のモデル

S5 体系のモデル $\mathcal{M} = \langle W, P \rangle$ は下の表のような形で表される．

	$\mathbf{P}_0$	$\mathbf{P}_1$	$\mathbf{P}_2$	$\mathbf{P}_3$	$\cdots$
α	1	1	0	0	$\cdots$
β	0	1	0	0	$\cdots$
γ	0	1	1	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

W が有限の場合もあり，たとえば $W = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ のような場合，次のような例が考えられる．

	$\mathbf{P}_0$	$\mathbf{P}_1$	$\mathbf{P}_2$	$\mathbf{P}_3$	$\cdots$
α	1	1	0	0	$\cdots$
β	1	0	0	0	$\cdots$
γ	0	1	1	0	$\cdots$

$\mathbf{P}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ は，有限個の原子文しか扱わない場合でも，無限個あるとして差し支えない．

S5 体系のモデル

$\mathcal{M} = \langle W, P \rangle$ can be written in the form of a table below:

	$\mathbf{P}_0$	$\mathbf{P}_1$	$\mathbf{P}_2$	$\mathbf{P}_3$	$\cdots$
α	1	1	0	0	$\cdots$
β	0	1	0	0	$\cdots$
γ	0	1	1	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

W may be finite, e.g., $W = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, then the table is as follows.

	$\mathbf{P}_0$	$\mathbf{P}_1$	$\mathbf{P}_2$	$\mathbf{P}_3$	$\cdots$
α	1	1	0	0	$\cdots$
β	1	0	0	0	$\cdots$
γ	0	1	1	0	$\cdots$

$\mathbf{P}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ is handled as an infinite sequence, even when a finite number of sentences are handled.

演習問題 (Exercise)

1. 前ページの下の例について，W，P_0, P_1, P_2, P_3 を示せ．(Show W，P_0, P_1, P_2, P_3 for the last example.)

2. 前ページの上の例では，たとえば，$\mathcal{M}, \alpha \models \mathbf{P}_0$，$Not \mathcal{M}, \beta \models \mathbf{P}_0$，$Not \mathcal{M}, \gamma \models \mathbf{P}_0$ となる．これと同様に，下の例について $\mathbf{P}_0$，$\mathbf{P}_1$，$\mathbf{P}_2$，$\mathbf{P}_3$ の各可能世界における真偽を記せ．(In the last example we have $\mathcal{M}, \alpha \models \mathbf{P}_0$，$Not \mathcal{M}, \beta \models \mathbf{P}_0$，$Not \mathcal{M}, \gamma \models \mathbf{P}_0$. Using such symbols, express the truth/falsity of $\mathbf{P}_0$，$\mathbf{P}_1$，$\mathbf{P}_2$，$\mathbf{P}_3$ at every world in the last finite example.)

可能世界真理値表

前ページの後の例について，$\mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_0$ の各可能世界での真理値を計算してみよう．次のような，**可能世界簡略化真理値表**を用いることができる．

	$\mathbf{P}_1$	$\to$	$\mathbf{P}_2$	$\wedge$	$\mathbf{P}_0$
α	1	0	0	0	1
β	0	1	0	0	1
γ	1	0	1	0	0

$\Diamond(\mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_2)$ の各可能世界での真理値は次のように計算される．

	$\Diamond$	$(\mathbf{P}_1$	$\to$	$\mathbf{P}_2)$
α	1	1	0	0
β	1	0	1	0
γ	1	1	1	1

Truth tables for possible worlds

Suppose the last model is given and we considerr truth values of $\mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_0$ for each possible world. For this purpose the following **(abbreviated) truth table for possible worlds** can be used.

	$\mathbf{P}_1$	$\to$	$\mathbf{P}_2$	$\wedge$	$\mathbf{P}_0$
α	1	0	0	0	1
β	0	1	0	0	1
γ	1	0	1	0	0

Then the truth values of $\Diamond(\mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_2)$ for each possible worlds are obtained as follows.

	$\Diamond$	$(\mathbf{P}_1$	$\to$	$\mathbf{P}_2)$
α	1	1	0	0
β	1	0	1	0
γ	1	1	1	1

演習問題 (Exercise)

1. テキスト p.7 の公理 **P1–P3** が恒真であることを，簡略化された真理値表を作ることにより確かめよ．(Check validity of axioms **P1–P3**.)

2. 次の式は正しいかどうか答えよ．(Answer whether the following sentences are true or false.)

1. $\mathcal{M}, \alpha \models \mathbf{P}_0 \to \mathbf{P}_1 \land \mathbf{P}_2$
2. $\mathcal{M}, \beta \models \Box\, (\mathbf{P}_0 \land \mathbf{P}_2)$
3. $\mathcal{M}, \alpha \models \Diamond\, (\mathbf{P}_2 \leftrightarrow \mathbf{P}_3)$

様相論理の Kripke 意味論 (標準モデル)
Kripke semantics (standard models)

- W: 可能世界の集合 (set of possible worlds),
  $W = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$
- $P_0, P_1, P_2, \dots$: P_i は W の部分集合で，原子文 $\mathbf{P}_i$ が成立する可能世界の全体 ($i = 0, 1, 2, \dots$), (P_i is the subset of は W such that $\mathbf{P}_i$ is true.)
- $P = \langle P_0, P_1, P_2, \dots \rangle$.
- R : W 上の 2 項関係（到達可能関係）(R is a binary relation of W, accessibility relation.)
- $\mathcal{M} = \langle W, R, P \rangle$: モデル (model)

A が真 (A is true): A がモデル $\mathcal{M}$ におけるある可能世界 α で真
$\Leftrightarrow \mathcal{M}, \alpha \models A$ (A is true at α in $\mathcal{M}$).

定義 (Definitions)

S5 体系と比べたとき，(9), (10) だけが異なる．
(Only (9) and (10) are different from S5 system.)

(1) $\mathcal{M}, \alpha \models \mathbf{P}_n \Leftrightarrow \alpha \in P_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

(2) $\mathcal{M}, \alpha \models \top$.

(3) Not $\mathcal{M}, \alpha \models \bot$.

(4) $\mathcal{M}, \alpha \models \neg A \Leftrightarrow$ not $\mathcal{M}, \alpha \models A$.

(5) $\mathcal{M}, \alpha \models A \wedge B \Leftrightarrow$ both $\mathcal{M}, \alpha \models A$ and $\mathcal{M}, \alpha \models B$.

(6) $\mathcal{M}, \alpha \models A \vee B \Leftrightarrow$ either $\mathcal{M}, \alpha \models A$ or $\mathcal{M}, \alpha \models B$.

(7) $\mathcal{M}, \alpha \models A \rightarrow B \Leftrightarrow$ if $\mathcal{M}, \alpha \models A$ then $\mathcal{M}, \alpha \models B$.

(8) $\mathcal{M}, \alpha \models A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \mathcal{M}, \alpha \models A$ if and only if $\mathcal{M}, \alpha \models B$.

(9) $\mathcal{M}, \alpha \models \Box A \Leftrightarrow$ for every β in $\mathcal{M}$ such that $\alpha R \beta$, $\mathcal{M}, \beta \models A$.

(10) $\mathcal{M}, \alpha \models \Diamond A \Leftrightarrow$ for some β in $\mathcal{M}$ such that $\alpha R \beta$, $\mathcal{M}, \beta \models A$.

標準モデル (standard model)

- $\Box A$(A は必然): A は現在の世界から到達可能な可能世界の至る所で成立する.
- $\Diamond A$(A は可能): A は現在の世界から到達可能な可能世界のどこかで成立する.

標準モデル $\mathcal{M} = \langle W, R, P \rangle$ は下の表のような形，および R で表される.

	$\mathbf{P}_0$	$\mathbf{P}_1$	$\mathbf{P}_2$	$\mathbf{P}_3$	$\cdots$
α	1	1	0	0	$\cdots$
β	0	1	0	0	$\cdots$
γ	0	1	1	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

$R = \{\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \beta, \beta \rangle, \ldots\}$

問　S5 体系は，標準モデルの特殊な場合とみなすことができる．そのようにみなした場合，R はどのように考えればよいか？

Standard model

- $\Box A$(A is necessary: A is true at every world accessible from the current world.
- $\Diamond A$(A is possible: A is true at some world accessible from the current world.

A standard model $\mathcal{M} = \langle W, R, P \rangle$ can be expressed by the following table and R.

	$\mathbf{P}_0$	$\mathbf{P}_1$	$\mathbf{P}_2$	$\mathbf{P}_3$	$\cdots$
α	1	1	0	0	$\cdots$
β	0	1	0	0	$\cdots$
γ	0	1	1	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

$R = \{\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \beta, \beta \rangle, \ldots\}$

Question: S5 system is a special case of a standard model. If so, what is R for the S5 system?

例 (Example)

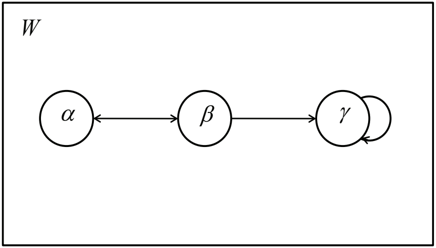
W が有限の場合もあり，たとえば $W = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ のような場合，次のような例が考えられる．(Let us consider the following table where $W = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.)

	$\mathbf{P}_0$	$\mathbf{P}_1$	$\mathbf{P}_2$	$\mathbf{P}_3$	$\cdots$
α	1	1	0	0	$\cdots$
β	1	0	0	0	$\cdots$
γ	0	1	1	0	$\cdots$

R については，以下のように表すことができる．(R is represented by a diagram in the following figure.)

$W = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$R = \{<\alpha,\beta>,<\beta,\alpha>,<\beta,\gamma>,<\gamma,\gamma>\}$



これについては，たとえば，$\mathcal{M}, \beta \models \Box\, \mathbf{P}_1$ や $Not \mathcal{M}, \alpha \models \Diamond\, \mathbf{P}_2$ であるなど，S5 体系とは明らかに異なることがわかる．(This system is obviously different from S5: $\mathcal{M}, \beta \models \Box\, \mathbf{P}_1$, $Not \mathcal{M}, \alpha \models \Diamond\, \mathbf{P}_2$)

Valid (普遍妥当) な文 (Valid sentences)

A が valid(普遍妥当, $\models A$): A があらゆるモデルのすべての可能世界で真

$$\models A \Leftrightarrow \text{for every model } \mathcal{M} \text{ and every } \alpha \text{ in } \mathcal{M},\ \mathcal{M}, \alpha \models A$$

valid な文の例 (Examples of valid sentences)

1. 命題論理の恒真文（様相記号を含まない）[Tautologies of propositional logic without any modal symbol]
2. 様相論理のトートロジー（様相記号を含んでいるが，命題論理の恒真文と同様に扱うことができる文で，次に述べる）[Tautologies of modal logic that can be handled like a tautology in propositonal logic]
3. 上記 1,2 のいずれにもあてはまらない文（様相論理に特有の validity）[Validity inherent to modal logic]

様相論理のトートロジー

様相論理の文において，様相記号を含む最大の**部分論理式**を命題変数の記号（何でも良いが，同じ部分論理式については同じ記号を用いる）で置き換えると，命題論理の文ができる．この文が，命題論理の恒真文のとき，もとの文を**様相論理のトートロジー**と呼ぶ.

例

$\Box A \wedge \Diamond(B \vee \Box A) \to \Box A \vee D$ を $p = \Box A$, $q = \Diamond(B \vee \Box A)$ と置くと，$p \wedge q \to p \vee D$ となり，これは恒真だから，元の式は様相論理のトートロジーである.

問 このことを確かめよ.

Tautologies of modal logic

Let A is a sentence of modal logic. Suppose B is a maximal subsentence that includes a modal symbol and replace B by a propositional variable, say p (the same subsentence should be replaced by the same symbol). The result is a propositional logic sentence, say A'. If the derived sentence A' is a tautology of propositional logic, then the original sentence A is called a tautology of modal logic.

例

Suppose $\Box A \wedge \Diamond (B \vee \Box A) \to \Box A \vee D$. Put $p = \Box A$, $q = \Diamond (B \vee \Box A)$, then we have $p \wedge q \to p \vee D$ Since the last sentence is a tautology of propostional logic, $\Box A \wedge \Diamond (B \vee \Box A) \to \Box A \vee D$ is a tautology of modal logic.

Question: Check this.

S5 体系における valid な式 (Valid sentences in S5 system)

様相論理に特有の validity が問題である．S5 体系では，次の 5 つの式はいずれも valid であることが知られている．(Validity specific to S5 system is important. The following five sentences are all valid in S5 system.)

- **Df◇.** $\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$.
- **K.** $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.
- **T.** $\Box A \to A$
- **5.** $\Diamond A \to \Box\Diamond A$.

スキーマ T の Validity の証明

S5 体系では，T は valid.(Proof of T in S5 system.)

任意の $\mathcal{M}$ と α in $\mathcal{M}$ をとる．$\mathcal{M}, \alpha \models \Box A$ と仮定する．**(9')** よりすべての β in $\mathcal{M}$ について $\mathcal{M}, \beta \models A$. このような β には α 自身も含まれるので，$\mathcal{M}, \alpha \models A$. すなわち，if $\mathcal{M}, \alpha \models \Box A$ then $\mathcal{M}, \alpha \models A$ であるから，**(7)** によって $\mathcal{M}, \alpha \models \Box A \to A$. $\mathcal{M}$ と α は任意であったから，$\models \Box A \to A$. //
(Proof) Let $\mathcal{M}$ and α in $\mathcal{M}$ are arbitrary, and suppose $\mathcal{M}, \alpha \models \Box A$. From **(9')**, for any β in $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}, \beta \models A$. Hence, if $\mathcal{M}, \alpha \models \Box A$ then $\mathcal{M}, \alpha \models A$ which implies $\mathcal{M}, \alpha \models \Box A \to A$ from **(7)**. We thus have $\models \Box A \to A$. //

反モデル (A counter model)

$A \rightarrow \Box A$ **は valid ではない.** ($A \rightarrow \Box A$ is not valid.)

$W = \{\alpha, \beta\}$, 原子文 $\mathbf{P}_0$ について $P_0 = \{\alpha\}$, $A = \mathbf{P}_0$ とおく.
$\mathcal{M}, \alpha \models A$ であるが，$\mathcal{M}, \beta \models A$ ではないので，$\mathcal{M}, \alpha \models \Box A$ ではない．よって，$\mathcal{M}, \alpha \models A \rightarrow \Box A$ は成立しない．//
(Proof) Put $W = \{\alpha, \beta\}$, $P_0 = \{\alpha\}$, $A = \mathbf{P}_0$. We have $\mathcal{M}, \alpha \models A$ and $\mathcal{M}, \beta \models A$. Thus, we have $\mathcal{M}, \alpha \models A$ and *not* $\mathcal{M}, \alpha \models \Box A$.//

問: $A \rightarrow \Diamond A$ は valid である．このことを示せ. (Show that $A \rightarrow \Diamond A$ is valid.)

問: 先のスライドにある **Df** $\Diamond$, **K**, **5** がいずれも valid であることを示せ（この問は少し難しい）. (Show that **Df** $\Diamond$, **K**, **5** are all valid.)

注意 (Notes)

(i) **K** が valid であることを示すには,「任意の $\mathcal{M}$ と α in $\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{M}, \alpha \models \Box(A \rightarrow B)$ かつ $\mathcal{M}, \alpha \models \Box A$ であると仮定すれば, $\mathcal{M}, \alpha \models \Box B$ も成立する」ことを示せばよい. (To show **K** is valid, it is sufficient to show that, if $\mathcal{M}, \alpha \models \Box(A \rightarrow B)$ and $\mathcal{M}, \alpha \models \Box A$, then $\mathcal{M}, \alpha \models \Box B$, for arbitrary $\mathcal{M}$ and α in $\mathcal{M}$.)

(ii) **Df** $\Diamond$は $\Diamond$が $\neg$ と$\Box$で「定義できる」ことを示している. (**Df** $\Diamond$ means that $\Diamond$ can be defined by using $\neg$ and $\Box$.)

(iii) **T** と **5** は S5 体系に特有の普遍妥当性であるが, **K** と **Df** $\Diamond$ はすべての標準モデルについて valid である. (Validity of **T** and **5** are specific to S5 system, but **K** and **Df** $\Diamond$ are valid in every standard model, which will be described later.)

注意: つづき (Proof omitted in this slide)

$\models A \to B$ **かつ** $\models A$ **ならば，** $\models B$.(If $\models A \to B$ and $\models A$, then $\models B$.)

任意の $\mathcal{M}$ と α in $\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{M}, \alpha \models A \to B$ かつ $\mathcal{M}, \alpha \models A$ と仮定する．$\mathcal{M}, \alpha \models A \to B$ は「もし，$\mathcal{M}, \alpha \models A$ ならば $\mathcal{M}, \alpha \models B$」という意味であり，かつ $\mathcal{M}, \alpha \models A$ と仮定したから，$\mathcal{M}, \alpha \models B$ となる．$\mathcal{M}$ と α は任意だから，$\models B$.//

$\models A$ **ならば，** $\models \Box A$.(If $\models A$, then $\models \Box A$.)

任意の $\mathcal{M}$ と α in $\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{M}, \alpha \models A$ と仮定する．α は任意だから，A がすべての可能世界で成り立つ．従って，$\mathcal{M}, \alpha \models \Box A$. $\mathcal{M}$ と α は任意だから，$\models \Box A$. //

様相論理の公理 (Axioms of modal logic)

公理として，命題論理の公理 **P1–P3** の他に次のうちいくつかを仮定する．この公理のとり方によって異なる様相論理の体系ができる．(Axioms in modal logic are **P1–P3** and some of the followings. Different sets of axioms lead to different systems of modal logic.)

Df $\Diamond$**.** $\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$.
K. $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.
D. $\Box A \to \Diamond A$.
T. $\Box A \to A$.
B. $A \to \Box\Diamond A$.
4. $\Box A \to \Box\Box A$.
5. $\Diamond A \to \Box\Diamond A$.

標準モデルでは，公理として **Df** $\Diamond$ と **K** は常に用いられる．この他に公理 **T** を用いるとき，KT-体系，さらに **5** を用いると KT5-体系のように呼ぶ．(In standard models, **Df** $\Diamond$ and **K** are always used. If **T** is added to these two, the modal logic system is called KT-system, when **T** and **5** are added, it is called KT5-system.)

推論規則 (Inference rules)

推論規則として，**MP** および,

RN. A から $\Box A$ を推論する．

を用いる．これらを

MP. $$\frac{A \qquad A \to B}{B}$$

RN. $$\frac{A}{\Box A}$$

と書く．(Two inference rules **MP** and **RN** as above are used.)

定理と証明 (Theorem and proof)

様相論理の体系（KT5-体系のような）においてこれらの公理と推論規則を用いて命題論理の証明理論において述べたものと同様の手続きによって証明される論理式を定理式という．A が定理式のとき，$\vdash A$ と書く．詳しく書けば，次のようになる．

一般に，Γ を論理式の集合とし，$A_1, \ldots, A_n$ を論理式の列とする．各 i $(1 \leq i \leq n)$ について A_i が次の 3 つのいずれかであるとする．

1. A_i は公理または Γ の要素．
2. A_i は **MP** における 2 つの前提 A_j, A_k $(j, k < i)$ からの結論．
3. A_i は **RN** における前提 A_j $(j < i)$ からの結論 (従って，$A_i = \Box A_j$).

このとき，$A_1, \ldots, A_n$ を A_n の Γ からの (形式的) 証明であるという．また，A_n を Γ からの帰結という．特に，$\Gamma = \emptyset$(空集合) のとき，$A_1, \ldots, A_n$ を A_n の証明といい，A_n を定理あるいは定理式という．
(Theorem of modal logic is defined by a sequence $A_1, \ldots, A_n$ of which each A_i is an axiom or direct consequence of inference rules **MP** or **RN** where the premises are before A_i in the sequence. A theorem is written as $\vdash A$. In short, a theorem has a proof tree where a leaf is an axiom and a branch is an inference rule.)

モデルと推論システムの関係

一般に，ある性質をもつ標準モデルは一通りではない．そこで，1 つのモデルについて議論するよりも，モデルのクラス (集まり) について考察するほうが便利である．そこで，モデルのクラスを **C** などで表し，次の記号を定義する．
(We have a variety of standard model and hence *a class* of models is studied. A class of models is denoted e.g., by **C** and the following validity is defined.)

$$\mathcal{M} \models A \Leftrightarrow \text{for every } \alpha \text{ in } \mathcal{M},\ \mathcal{M}, \alpha \models A.$$

$$\mathbf{C} \models A \Leftrightarrow \text{for every } \mathcal{M} \text{ in } \mathbf{C},\ \mathcal{M} \models A.$$

定理: **C** をある標準モデルのクラスとする．このとき，次の関係が成り立つ．(Let **C** is a class of standard models. Then the following properties hold.)

(1) $\mathbf{C} \models \Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$.

(2) For $n \geq 0$, if $\mathbf{C} \models (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \to A$, then $\mathbf{C} \models (\Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n) \to \Box A$.

(3) If $\mathbf{C} \models A$, then $\mathbf{C} \models \Box A$.

(4) $\mathbf{C} \models \Box (A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.

(5) If $\mathbf{C} \models A$ and $\mathbf{C} \models A \to B$, then $\mathbf{C} \models B$.

(6) If A is a tautology, $\mathbf{C} \models A$.

反モデル

定理: **D, T, B, 4, 5** のそれぞれについて，そのスキーマを valid にしない標準モデルが存在する．

(証明の一部) それぞれのスキーマが成立しないモデル (countermodel) を構成する．

D が成立しないモデル:
$\mathcal{M} = \langle W, R, P \rangle$ において，$W = \{\alpha\}$, $R = \emptyset$ (空関係)，$P_n = \emptyset$ $(n \geq 0)$ とする．$\mathcal{M}, \alpha \models \Box\, \mathbf{P}_0$ ($\alpha R \beta$ となる β が存在しない).
同じ理由によって，not $\mathcal{M}, \alpha \models \Diamond\, \mathbf{P}_0$. すなわち，not $\mathcal{M}, \alpha \models \Box\, \mathbf{P}_0 \to \Diamond\, \mathbf{P}_0$.//

問: $W = \{\alpha, \beta\}$, $\alpha R \beta$, not $\alpha R \alpha$，not $\beta R \beta$，$P_n = \{\beta\}$ $(n \geq 0)$ とするとき，このモデルにおいて，$\Box\, \mathbf{P}_0 \to \mathbf{P}_0$ は valid でないことを示せ．

Countermodels

Theorem: Concerning each of schemas **D, T, B, 4, 5**, there is a standard model in which the schema is not valid.

(A part of proof) We construct such model called a countermodel.

Model in which **D** is not valid:
For $\mathcal{M} = \langle W, R, P \rangle$, put $W = \{\alpha\}$, $R = \emptyset$ (empty relation), and $P_n = \emptyset$ $(n \geq 0)$. $\mathcal{M}, \alpha \models \Box\, \mathbf{P}_0$, since there is no β such that $\alpha R \beta$. By the same reason, not $\mathcal{M}, \alpha \models \Diamond\, \mathbf{P}_0$. Thus, we have not $\mathcal{M}, \alpha \models \Box\, \mathbf{P}_0 \to \Diamond\, \mathbf{P}_0$.//

Question : Let $W = \{\alpha, \beta\}$, $\alpha R \beta$, not $\alpha R \alpha$, not $\beta R \beta$, $P_n = \{\beta\}$ $(n \geq 0)$. Prove $\Box\, \mathbf{P}_0 \to \mathbf{P}_0$ is not valid in this model.

関係の性質と公理スキーマの関係

定理:

(1) R が連鎖的 (serial: 任意の α in $\mathcal{M}$ に対して $\alpha R\beta$ となる β in $\mathcal{M}$ が存在する) ならば，スキーマ **D** は valid である．

(2) R が反射的 (reflexive: 任意の α in $\mathcal{M}$ に対して $\alpha R\alpha$) ならば，スキーマ **T** は valid である．

(3) R が対称的 (symmetric: 任意の α, β in $\mathcal{M}$ に対して $\alpha R\beta$ ならば $\beta R\alpha$) ならば，スキーマ **B** は valid である．

(4) R が推移的 (transitive: 任意の α, β, γ in $\mathcal{M}$ に対して $\alpha R\beta$, $\beta R\gamma$ ならば $\alpha R\gamma$) ならば，スキーマ **4** は valid である．

(5) R がユークリッド的 (euclidean: 任意の α, β, γ in $\mathcal{M}$ に対して $\alpha R\beta$, $\alpha R\gamma$ ならば $\beta R\gamma$) ならば，スキーマ **5** は valid である．

証明の一部

((1) の証明) R が連鎖的である標準モデルのクラスを $\mathbf{C}_D$ と書く．証明すべきことは「$\mathbf{C}_D$ に属する任意のモデル $\mathcal{M}$ と α in $\mathcal{M}$ に対して，$\mathcal{M}, \alpha \models \Box A$ ならば，$\mathcal{M}, \alpha \models \Diamond A$.」$R$ が連鎖的だから $\alpha R \beta$ となる β がある．そこで，$\mathcal{M}, \alpha \models \Box A$ とすると，$\Box$の定義 **(9)** より $\mathcal{M}, \beta \models A$. $\Diamond$の定義 **(10)** によって $\mathcal{M}, \alpha \models \Diamond A$. すなわち証明された．//

問: (2) の証明を試みよ．

Relations and axioms

Theorem:

(1) If R is serial, which means that for any α in $\mathcal{M}$, there exists β in $\mathcal{M}$ such that $\alpha R \beta$, then schema **D** is valid.

(2) If R is reflexive, which means that for all α in $\mathcal{M}$, $\alpha R \alpha$, then schema **T** is valid.

(3) If R is symmetric, which means that for any α, β in $\mathcal{M}$ such that $\alpha R \beta$, $\beta R \alpha$ holds, then **B** is valid.

(4) If R is transitive, which means that for any α, β, γ in $\mathcal{M}$ such that $\alpha R \beta$ and $\beta R \gamma$, $\alpha R \gamma$ holds, then schema **4** is valid.

(5) If R is euclidean, which means that for any α, β, γ in $\mathcal{M}$ such that $\alpha R \beta$ and $\alpha R \gamma$, $\beta R \gamma$ holds, schema **5** is valid.

Proof of (1)

The class in which R is serial is written as $\mathbf{C}_D$. What has to be proved is 'for any model $\mathcal{M}$ and α in $\mathcal{M}$ in $\mathbf{C}_D$, if $\mathcal{M}, \alpha \models \Box A$ then $\mathcal{M}, \alpha \models \Diamond A$.'
As R is serial, there exists β such that $\alpha R \beta$. Suppose $\mathcal{M}, \alpha \models \Box A$, then とすると，□の定義 **(9)** より $\mathcal{M}, \beta \models A$ from the definition of $\Box$ (**(9)**). The definition of $\Diamond$ (**(10)**) implies $\mathcal{M}, \alpha \models \Diamond A$. Thus (1) is proved.//

Question: Prove (2).

正規体系 (Normal systems)

様相論理の正規体系として最小のものを K–体系と呼ぶ．K–体系は **Df** $\Diamond$**, K** と命題論理の公理を含み，推論規則 **MP** と **RN** のもとで閉じている論理式の全体（定理の全体）のことである．

先に挙げた **D，T，B，4，5** のいずれかあるいはいくつかを公理として付け加えることで，様々な体系ができる。例えば、KD–体系とは，命題論理の公理，**Df** $\Diamond$**, K** および **D** を公理として含み，**MP** と **RN** のもとで閉じている論理式の全体のことである．

これらの中で，KD, KT, KTB, KT4, KT5 が重要と考えられてきた．KT5 体系は S5 体系の公理系と同じである．

K — KD — KT — KTB, KT4 — KT5

上の関係で，右へ行くほで体系は広くなる．すなわち，証明できる定理が多くなる．たとえば，KD において証明される定理は，KT においても証明される．(KTB と KT4 の間にこのような広い/狭いの関係はない)

正規体系 (Normal systems)

The smallest normal system is called K-system. K-system is the collection of all theorems proved from axioms **P1- P3** and **Df**$\Diamond$**,** **K**, with inference rules **MP** and **RN**.
We have various systems by adding one or more of **D, T, B, 4, 5** to K-system. For example, KD–system means the collection of all theorems proved from axioms **P1- P3**, **Df**$\Diamond$**,** **K**, and **D** with inference rules

Among verious systems, KD, KT, KTB, KT4, KT5 have been mainly considered. In particular, KT5-system is the same as S5-system.

$$\mathrm{K} \quad — \quad \mathrm{KD} \quad — \quad \mathrm{KT} \quad — \quad \mathrm{KTB},\ \mathrm{KT4} \quad — \quad \mathrm{KT5}$$

The right side shows broader class, i.e., more theorems are proved. For example, if A is a theorem in KD-system, A is also a theorem in KT-system. (There is, however, no such inclusion relation between KTB and KT4.)

健全性と完全性

様相論理の標準モデルについて，スキーマ **D** が valid $\Leftrightarrow$ R が serial 等をみてきた．この節では，健全性と完全性について概観する．

健全性
: ある公理体系による定理式はそれに対応するモデルのクラスにおいて valid.

完全性
: 健全性の逆．あるモデルのクラスにおいて valid な式はそれに対応する公理体系による定理式.

そこで，次のように書く．

- 関係 R が serial である標準モデルのクラスを $\mathbf{C}_D$.
- 関係 R が reflexive である標準モデルのクラスを $\mathbf{C}_T$.
- 関係 R が symmetric である標準モデルのクラスを $\mathbf{C}_B$.
- 関係 R が transitive である標準モデルのクラスを $\mathbf{C}_4$.
- 関係 R が euclidean である標準モデルのクラスを $\mathbf{C}_5$.

Soundness and completeness

soundness: If an arbtrary theorem in a normal system is valid in a class of models, then we call soundness holds.

completeness If an arbitrary sentence that is valid in a class of models is a thereom in a normal system, then we call completeness holds.

- $\mathbf{C}_D$ denotes the class of standard models in which R is serial.
- $\mathbf{C}_T$ denotes the class of standard models in which R is reflexive.
- $\mathbf{C}_B$ denotes the class of standard models in which R is symmetric.
- $\mathbf{C}_4$ denotes the class of standard models in which R is transitive.
- $\mathbf{C}_5$ denotes the class of standard models in which R is euclidean.

健全性と完全性

定理 [健全性 (soundness)]
KD, KT, KTB, KT4, KT5-体系はそれぞれクラス $\mathbf{C}_D$, $\mathbf{C}_T$, $\mathbf{C}_T \cap \mathbf{C}_B$, $\mathbf{C}_T \cap \mathbf{C}_4$, $\mathbf{C}_T \cap \mathbf{C}_5$ に関して健全である．

(証明の一部) KD-体系において証明される定理を A_n とし，その証明を $A_1, \ldots, A_n$ とする．KD の公理が $\mathbf{C}_D$ で valid であることおよび推論 **RPL** (**MP** でもよい) の前提が $\mathbf{C}_D$ で valid のとき，結論も valid であることを先に示した．また，**RK** の前提が valid ならば，結論も valid であることも既に示されている．これらを用いて，$A_1, \ldots, A_n$ における $A_1, \ldots, A_k$ が valid であることを k に関する帰納法で示せばよい．
他の体系についても同様である．

完全性: 難しいので，省略するが，web ページからダウンロードできるプリントには概略を示してあるので，興味のある人は見てほしい．

Soundness and completeness

Theorem(soundness)
KD, KT, KTB, KT4, KT5-system are sound with respect to $\mathbf{C}_D$, $\mathbf{C}_T$, $\mathbf{C}_T \cap \mathbf{C}_B$, $\mathbf{C}_T \cap \mathbf{C}_4$, $\mathbf{C}_T \cap \mathbf{C}_5$, respectively.

(A part of proof) Let A_n be a theorem in KD-system and its proof be $A_1, \ldots, A_n$. It is easy to see axioms of KD are valid $\mathbf{C}_D$. We observe if premises of **MP** are valid, then the direct consequence is also valid. It is also immediate to see that if premise of **RN** is valid, then the direct consequence is valid. Thus, we can prove $A_1, \ldots, A_k$ is valid by matheatical induction. Hence A_n is valid. The same arguments hold for other systems.

Completeness: Difficult and omitted.

応用例（再掲）

- $\mathcal{B}A$ (信念論理 [Logic of belief]：$\mathcal{B}A$ は A を信じている，と読む [I believe A])
- $\mathcal{K}A$ (知識論理 [epistemic logic]：$\mathcal{K}A$ は A を知っている，と読む [I know A])
- $\mathcal{F}A$ (時制論理 [temporal logic]：未来に A が必然になる [A will be true in the future])

これらにおいては，$\mathcal{B}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{F}$ は必然記号として扱い，可能記号は **Df** $\Diamond$ を利用して，それぞれ $\neg\mathcal{B}\neg$, $\neg\mathcal{K}\neg$, $\neg\mathcal{F}\neg$ で表す．($\mathcal{B}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{F}$ are handled as necessity and $\neg\mathcal{B}\neg$, $\neg\mathcal{K}\neg$, $\neg\mathcal{F}\neg$ are possibility.)

問 (Question)　これらは，S5 体系として扱えるとは限らない．なぜか？(These are not S5 system in general. Why?)

問 (Question)　これらの応用における可能世界は，どのようにとるべきか？(How to take possible worlds in these applications?)

問 (Question)　これらの応用における公理は，どのようにとるべきか？(How to set axioms in these applications?)

Moore's paradox – from Wikipedia 11 April 2010

Moore's paradox is that it is absurd to make statements like "It's raining outside but I don't believe that it is", even though they are often true (e.g. if the weather forecast is wrong).

The paradox is named after G. E. Moore, who discussed it once in a lecture. It is said that when Ludwig Wittgenstein heard about it that evening, he rushed round to Moore's lodgings, got him out of bed and insisted that Moore repeat the entire lecture to him.

Wittgenstein reportedly considered it Moore's most important contribution to philosophy, and devoted numerous remarks to it throughout his later writings, which has brought the paradox the attention it might otherwise not have received.

Moore's paradox forces us to think about such diverse topics as, among other things, the relation between assertion and belief, content and expression, the nature of belief, knowledge and rationality. There is, as yet however, no generally accepted explanation to Moore's paradox in the philosophical literature.

ムーアのパラドックス – from Wikipedia 27 April 2010

言語哲学においてはムーアは「ムーアのパラドックス」で知られる。ムーアのパラドックスとは、「外で雨が降っており、かつ、わたしは外で雨が降っているとは思っていない」というタイプの言明が非常に馬鹿げているというものである.

問 ムーアのパラドックスが自然に表されるような例を考えよ.

関連資料 (Related materials)

- 日本語テキスト：「ソフトコンピューティング基礎論　」'筑波大学　宮本研究室　'で Google 検索し，**講義資料**のところからダウンロードできる
- B. Chellas, *Modal Logic: An Introduction*, Cambridge University Press, 1980.