

# ソフトコンピューティング-その2

## Soft Computing I – No.2

宮本 定明 (Sadaaki Miyamoto)

April, 2015

# 命題論理の真理値表

命題変数 (原子文) を  $p, q, r, \dots$  とするとき, 真理値表が得られる.

Table: 命題変数と真理値表, 簡略化真理値表

$p$	$q$	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

簡略化真理値表: 黒板で説明する

# Truth table of propositional logic

Let  $p, q, r, \dots$  are propositional variables (alias atomic sentences), we have the following truth table.

Table: Truth table

$p$	$q$	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Abbreviated truth table: see separate sheet.

# 恒真式 (トートロジー)

恒真式 (トートロジー): 真理値表がすべて 1 になる論理式 .

- ▶  $p \rightarrow p,$
- ▶  $p \rightarrow (q \rightarrow p),$
- ▶  $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

などは恒真式 (トートロジー) .

問: これらがトートロジーであることを示せ .

# Tautologies

Tautology : Sentence that is always true for every combination of truth/falsity values of propositional variables.

Examples of tautologies are as follows.

- ▶  $p \rightarrow p,$
- ▶  $p \rightarrow (q \rightarrow p),$
- ▶  $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

**Question:** Show these are tautologies.

## Exercise

Write abbreviated truth tables of the following sentences. Answer whether each of them is a tautology or not.

1.  $p \vee q \rightarrow \neg p$

2.  $q \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

3.  $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$

4.  $A \wedge B \rightarrow B \vee A$

# 命題論理の証明理論 (Proof theory of propositional logic)

次の3つを命題論理の公理という。

(The following three sentence schemas are called axioms of propositional logic.)

$$\mathbf{P1.} \quad A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$\mathbf{P2.} \quad (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$\mathbf{P3.} \quad (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$$

命題論理の推論規則 **MP**(モダス・ポネンス):

$A$  と  $A \rightarrow B$  から  $B$  を推論する。

Inference rule of propostional logic (MODUS PONENS):

$B$  is a direct consequence of  $A$  and  $A \rightarrow B$ .

## 定理 (Theorem)

定理 (theorem) あるいは 定理式 とは，公理と推論規則を用いて導出される論理式である．論理式  $A$  が命題論理の定理のとき， $\vdash_{PL} A$  と書く．(A theorem is a sentence that is derived from the axioms and the inference rule.)

一般に， $\Gamma$  を論理式の集合とし， $A_1, \dots, A_n$  を論理式の列とする．各  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) について  $A_i$  が公理または  $\Gamma$  の要素であるか，あるいは **MP** における 2 つの前提  $A_j, A_k$  ( $j, k < i$ ) からの結論のとき， $A_1, \dots, A_n$  を  $A_n$  の  $\Gamma$  からの (形式的) 証明であるという．また， $A_n$  を  $\Gamma$  からの帰結という．特に， $\Gamma = \emptyset$  (空集合) のとき， $A_1, \dots, A_n$  を  $A_n$  の証明といい， $A_n$  を定理あるいは定理式という．



# Theorem

A theorem is a sentence that is derived from the axioms and the inference rule. If  $A$  is a theorem, we write  $\vdash_{PL} A$ .

Precisely, let  $\Gamma$  is a set of sentences, and  $A_1, \dots, A_n$  is a sequence of sentences. If, for each  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $A_i$  is an axiom or an element of  $\Gamma$ , or consequence of **MP** from two premises  $A_j, A_k$  ( $j, k < i$ ), then  $A_1, \dots, A_n$  is called formal proof of  $A_n$  from  $\Gamma$ .  $A_n$  is called logical consequence from  $\Gamma$ . In particular, when  $\Gamma = \emptyset$  (empty set),  $A_1, \dots, A_n$  is called proof of  $A_n$ , and  $A_n$  is called a theorem.

# 例 (Examples)

## 例 1:

- ▶  $A$  が公理ならば,  $\vdash_{PL} A$ . (If  $A$  is an axiom, then  $\vdash_{PL} A$ .)
- ▶  $A \vdash_{PL} B \rightarrow A$ .
- ▶  $A, A \rightarrow B \vdash_{PL} B$ .

## 例 2: $A \rightarrow A$ を証明する (Proof of $A \rightarrow A$ )

- ▶ (i)  $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$  (P1)
- ▶ (ii)  $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$   
(P2)
- ▶ (iii)  $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$  ((i), (ii), MP)
- ▶ (iv)  $A \rightarrow (A \rightarrow A)$  (P1)
- ▶ (v)  $A \rightarrow A$  ((iii), (iv), MP)

# 恒真式の記号と性質

文  $A$  が恒真 (トートロジー) のとき,  $\models A$  と書く .

$\models A \rightarrow B$  かつ  $\models A$  ならば,  $\models B$ .

問: なぜか考えよ .

注: 後で様相論理の普遍妥当式を同じ記号で定義するが, 恒真式は, 様相論理の普遍妥当式の特殊な場合である .

## Valid sentences

When  $A$  is valid (tautology), we write  $\models A$ .

If  $\models A \rightarrow B$  **and**  $\models A$ , **then**  $\models B$ .

**Question:** Answer why this holds.

## 恒真式の性質

$\models A \rightarrow B$  かつ  $\models A$  ならば,  $\models B$ .

$V(\cdot)$  を付値とする.  $A$  と  $B$  を構成する命題変数について, 任意の真偽の組合せをとるとする.  $\models A \rightarrow B$  から  $V(A \rightarrow B) = 1$  かつ  $V(A) = 1$ . もし  $V(B) = 0$  と仮定すると,  $V(A \rightarrow B) = 1$  から  $V(A) = 0$  となり, 矛盾する. よって  $V(B) = 0$ . 真偽の組合せは任意だから,  $\models B$ .

## A property of valid sentences

If  $\models A \rightarrow B$  and  $\models A$ , then  $\models B$ .

Let  $V(\cdot)$  be a valuation. Consider arbitrary combination of all truth values of all propositional variables in  $A$  and  $B$ .  $\models A \rightarrow B$  implies  $V(A \rightarrow B) = 1$  and  $V(A) = 1$ . Suppose  $V(B) = 0$ , we have  $V(A) = 0$  from  $V(A \rightarrow B) = 1$ , which is a contradiction. Hence  $V(B) = 1$ . Since every combination is taken, we have  $\models B$ .

# 命題論理の健全性と完全性

## [健全性]

$A$  は定理式  $\Rightarrow A$  は恒真 (トートロジー) .

- (i) 公理はすべて恒真 .
- (ii)  $A$  および  $A \rightarrow B$  がトートロジーならば,  $B$  も恒真 .
- (iii) よって,  $A$  の証明  $A_1, \dots, A_{n-1}, A_n (= A)$  における各  $A_i$  はすべて恒真 .

## [完全性]

$A$  はトートロジー  $\Rightarrow A$  は定理式 . (証明は難しいので, 省略)

健全性と完全性を合わせると

$$\models A \iff \vdash_{PL} A$$

つまり, 「常に真である文」と「定理として証明される文」は等価である .

# Soundness and completeness of propositional logic

## [Soundness:]

**$A$  is a theorem  $\Rightarrow A$  is valid (tautology).**

- (i) Axioms are all valid.
- (ii) If  $A$  and  $A \rightarrow B$  are valid,  $B$  is valid.
- (iii) Therefore, Each  $A_i$  in  $A_1, \dots, A_{n-1}, A_n (= A)$  for proving  $A$  are all valid.

## [Completeness:]

**$A$  is valid  $\Rightarrow A$  is a theorem.** (To prove the completeness is difficult and omitted.)

To put the soundness and completeness together, we have

$$\models A \iff \vdash_{PL} A$$

Therefore, ‘**an always true sentence** is equivalent to ‘**a provable sentence**’



## カリーのパラドックス (Wikipedia, 2010/4/19)

カリーのパラドックスの自然言語版は次のような文である。

この文が真なら、サンタクロースは実在する。

この文が真であると仮定する。すると、その内容からサンタクロースが実在するということが結論として得られる。これは conditional derivation (条件付き演繹) と呼ばれる自然演繹技法を使った推論である。

つまり、この文が真であるなら、サンタクロースは実在する – これはその文そのものと全く同じである。従ってこの文は真であり、サンタクロースは実在しなければならない。

この文形を使えばどんな主張も「証明」される。これがパラドックスである。

## Curry's paradox , 続き (Wikipedia, 2010/4/19)

証明しようとしている命題を  $Y$  とし、ここでは「サンタクロースは実在する」という命題を表すとする。次に  $X$  が真であれば  $Y$  が成り立つという文を  $X$  で表す。数学的にはこれを  $X = (X \rightarrow Y)$  と記し、 $X$  が自分自身を使って定義されていることがわかる。証明は以下のようなになる。

1.  $X \rightarrow X$  (恒真式)
2.  $X \rightarrow (X \rightarrow Y)$  ( $X = (X \rightarrow Y)$  であることから、1 の右辺を置換)
3.  $X \rightarrow Y$  (2 に縮約規則を適用)
4.  $X$  ( $X = X \rightarrow Y$  であることから 3 を置換)
5.  $Y$  (4 と 3 にモーダスポネンスを適用)

## 付値のカーリーのパラドックスへの応用

1.  $X = X \rightarrow Y$
2.  $V(X) = V(X \rightarrow Y)$
3. これから,  $V(X) = 1, V(Y) = 1$
4. つまり, はじめの式に付値を適用すると,  $V(X), V(Y)$  に関する方程式となり,  $Y$  には真の命題しか適用できない

## Curry's paradox (from Wikipedia)

Claims of the form "if A, then B" are called conditional claims. Curry's paradox uses a particular kind of self-referential conditional sentence, as demonstrated in this example:

If this sentence is true, then Germany borders China.

Even though Germany does not border China, the example sentence certainly is a natural-language sentence, and so the truth of that sentence can be analyzed. The paradox follows from this analysis. First, common natural-language proof techniques can be used to prove that the example sentence is true. Second, the truth of the example sentence can be used to prove that Germany borders China. Because Germany does not border China, this suggests that there has been an error in one of the proofs. Worse, the claim "Germany borders China" could be replaced by any other claim, and the sentence would still be provable; thus every sentence appears to be provable. Because the proof uses only well-accepted methods of deduction, and because none of these methods appears to be incorrect, this situation is paradoxical.

## Curry's paradox (from Wikipedia)

The following analysis is used to show that the sentence "If this sentence is true, then Germany borders China" is itself true. The quoted sentence is of the form "If A then B" where A refers to the sentence itself and B refers to "Germany borders China". The usual method for proving a conditional sentence is to assume that the hypothesis (A) holds, and prove from that assumption that the conclusion (B) holds. Therefore, assume A. Because A refers to the overall sentence, this means that assuming A is the same as assuming "If A then B". Therefore, in assuming A, we have assumed both A and "If A then B". From these, we can obtain B by modus ponens. Therefore the assumption of A is enough to guarantee that B is true: if the sentence is true, then Germany borders China. That is exactly what the sentence says: "If this sentence is true then Germany borders China". Therefore the sentence is true.