ソフトコンピューテング基礎論I ーロジックとリスクー

2015年4月

宮本定明

Introduction to Soft Computing – 1
-Logic and Risk –
-Sadaaki Miyamoto

はじめに：本講義の目的

- リスク解析では、確率・統計モデルが主要な解析ツールである。他の講義では、確率・統計について、学習する。
- 本講義では、リスク（不確実性）解析のためのツールあるいは枠組みとして、より知られていない枠組みについて述べる
- それらは、次の通りである。
  - 不確実性のロジックである様相論理
  - 様相論理のツール化であるラフ集合
  - ロジックと集合をエンジニアリングツールにしたファジィ集合論
- これらと確率・統計を合わせて、不確実性解析技法としてソフトコンピューティングと呼ぶ

Objectives of this lecture

- Probability and statistics are major tools for risk analysis. Other lecture courses will describe these methods.
- This lecture course focuses on other tools for risk analysis which implies uncertainties.
- We describe
- Modal logic as logic of uncertainty
- Rough sets as an application tool of modal logic to real world problems.
- Fuzzy set theory that brings logic and set-theory into a collection of engineering tools.
- These and probability and statistics are called soft computing as methods to analyze systems with uncertainties.

Why logic for risk engineering?

- Logic is fundamental in any fields of science and engineering.
- Risk engineering should have fundamental framework and methodologies.
- There are philosophical issues and we should have logical thinking.
- There are also paradoxes and dilemmas.
- This lecture presents a logical framework as well as philosophical problems.

システムモデルについて

- リスク解析を行う対象も、通常はシステムとして取り扱う
- システムモデル（数学モデル、確率モデル、統計モデル、グラフモデル、情報処理モデル）
- 対象とその組合せを図式化し、推論できるようにした言語あるいは疑似言語
- 数学モデルが代表的、実世界を抽象化し、数式で表現、数式で表現した後は、厳密な推論が行われる
- 数学モデルの妥当性：抽象化が適切かどうかは、現象や実験と比較することで確認
- 統計モデル：標本に対し、それがどのような分布から生成されたかの仮定、その妥当性は、検定など統計のツールで確認される

On system models

- Risk analysis is applied to a class of systems.
- This lecture overviews relatively unknown tools for and frameworks for risk analysis:
  - Modal logic to handle uncertainty
  - Fuzzy sets: engineering tool set derived from logic and set theory
  - Rough sets: application aspects of modal logic
- They are called soft computing tools
- Why not probability and statistics? – they are given in other lectures.

システムモデルとロジック

- ロジック（論理、logic）
  - 言語における推論の妥当性を確保
  - 言語における普遍性
  - 言語における抽象化（言語のモデル化）
  - 言語における真偽の判断
- 論理と記号論理（Logic and symbolic logic）
- 記号論理（あるいは数理論理mathematical logic）を扱う

Logics for system models

- What is *LOGIC*?
  - Logic ensures validity of inference in languages,
  - universal validity,
  - abstraction (model of language),
  - truth/falsity judgment in languages.
- Logic and symbolic logic
- Symbolic logic alias mathematical logic is discussed.

数学と数理論理

- 論理（古典論理）は数学を記述する。よって数学よりもより基礎的である
- 古典論理→集合→諸数学→数学モデル、のように記述が進む
- 古典論理に属する記号の例として、⇒（if-then）、⇔（if and only if）、∀（全称記号）、∃（存在記号）、などがある

Logic and mathematics

- Mathematics is described by logic.
- Logic is more fundamental than mathematics
- Classical logic → set theory → mathematics → mathematical models
- Symbols in classical logic:
  ⇒ (if – then), ⇔ (if and only if), ∀(for all), ∃(there exists)

なぜ記号論理ー様相論理ーを学ぶか

- 不確実性のモデルのなかで最も基本的
- 確率・ファジィなどはそこから導出される
- 論理学は万学の基礎だが学ぶ機会がない
- 人工知能の基礎として学ぶ
- リスクの基礎理論として未開発

Why modal logic is important?
- Fundamental in uncertainty models;
- Probability and fuzzy sets are derived from modal logic.
- Logic is most fundamental in science, but rarely studied by students.
- Fundamental in artificial intelligence.
- Developing theory in risk analysis.

ファジィ論理とファジィ集合

Fuzzy logic and fuzzy sets

- ファジィ論理は数理論理の一種（内容は後述）
- 数学を記述するわけではないが、言語のモデルの一つ
- 様々な数理論理学があるが、それらは言語のモデルで、人工知能分野で研究されている
- ファジィ集合は、数学を記述する集合論ではなく、数学モデルの一種。従って、諸数学のうちにはいる
- 不確実性記述のモデルとしては、確率・統計に次いでよく用いられる

Fuzzy logic is a kind of mathematical logic, not for describing mathematics, But for describing mathematical models. Second well-known tool for uncertainty modeling (first is probability).

確率・統計(probability and statistics)

- 確率の起源ー合理的な賭け (origin is rational bet)
  - 何回に1回ある事象(event)が起きるか (ratio of occurrence)
  - 7回のうち3回起こるなら、3/7の確率で起こる、とする
  - 3/7とは、7回繰り返せば、3回期待できる、という意味で、分数を使用する (3/7 means that we can expect 3 times of an event in 7 trials)
- 分布：2項分布やガウス分布が基本 (distributions)
  - 独立性の仮定など、数学の基本的推論から2項分布が得られる (binomial distribution is derived from logical inference with independence assumption)
  - 物理的な誤差法則からガウス分布が得られる (physical error law leads to Gaussian distribution)

確率・統計とその数学化

(probability: mathematical model and mathematics)

- 頻度統計：頻度分布から確率を定義
- ベイズ統計：主観確率（頻度に基づかない）を利用
- 両者の違いは、数学そのものでなく、数学モデルについての哲学の違い
- 公理主義的確率論（A. Kolmogorov）
  - 集合論と測度論に基づく数学の理論
  - 数学モデルには関係しない
  - 確率が測定できる事象と測定できない事象の差を明らかにする

Frequency interpretation of probability and Bayesian probability give different classes of mathematical models. The axiomatic theory of probability is not directly concerned with mathematical models.

確率論ーWikipediaから

- **確率論**（かくりつろん、*Probability theory*）とは、非決定論的過程、すなわち、ある現象の次の状態は、部分的には前の状態から決定されるが、完全に前の状態には依存しておらず、確率的な予言しかできない偶然現象に対して数学的なモデルを与え、解析する数学の一分野である。17世紀にカルダノ、パスカル、フェルマー、ホイヘンス等によって数学の一分野としての端緒が開かれた。
- 現代数学の確率論は、アンドレイ・コルモゴロフの "確率論の基礎概念"（1933年）に始まる**公理主義的確率論**である。他の現代数学と同様に、この確率論では「確率」が何を意味しているのかという問題は追求せず、「確率」が満たすべき性質をいくつか規定し、その性質から導くことのできる定理を突き詰めていく学問である。この確率論の基礎には集合論・測度論・ルベーグ積分があり、確率論を学ぶためにはこれらの知識が要求される。
- (See ‘probability’ in Wikipedia)

リスクの概念（The Concept of Risk）

- Riskの語源：アラビア語の*risq* あるいはラテン語の*risicum*
  - アラビア語の*risq*の意味は「（神から）与えられ、それから利益を得るもの」であり、*偶然的*かつ有利な結果
  - １２世紀のギリシャで使われていたアラビア語の*risq*からの派生語は偶然の結果を意味し、有利とか不利という含みはない
- ラテン語の*risicum*は、*偶然的*かつ不利な出来事
- *There are two origins of the word ‘risk’: one is Arabic risq that is fortune; the other is risicum of Latin that is misfortune.*

リスクの概念（続き）

- 専門的文献では、リスクという言葉はある結果の偶然性の計量（measurement）や結果のサイズやこれらの組合せ
- 災害の例をとれば、リスクという言葉は、予期しない結果、たとえば死者２０００人、あるいはその生起確率、たとえば１／１０００、さらにそれらの積、死者２名という統計的期待値
- Wharton（1991）：の定義(定量性ナシ)：「リスクとは、意思決定（decision）や行動（action）に伴う意図外の(unintended)、あるいは予期しない(unexpected)結果のことである。」
- 多くの文献ではリスクを定量化すべきものとしているが、これにあてはまらない場合もある

Most literature defines risk as measurement of uncertainty or the size of outcome, or the combination of both. In an example of a disaster, risk may be the size of an unexpected event, say, 2000 death, or its probability of 1/1000, or the expected value of the product 2. Wharton needs a definition without measurement or quantification.

リスク（不確実性）と論理

- 論理ー不確実性がない
- 不確実性の論理ー様相論理
  - この講義では様相論理を扱う
- 不確実性を扱うより現実的な方法論
  - 確率論・統計学（他の講義）
  - ファジィ理論（ここではファジィ論理を中心に）
  - ラフ集合論
  - これらは、様相論理の特殊化とみなせる

Risk and logic

- Generally, logic has no uncertainty.
- But modal logic can handle uncertainty that we discuss.
- Applications use frameworks and tools of
  - Probability and statistics
  - Fuzzy systems
  - Rough sets
  - But they are (in a sense) based on modal logic

論理学とコンピュータ

- 論理学の歴史
  - 古典論理学（アリストテレス）から
  - 形式論理学へ（フレーゲ、ラッセル、ホワイトヘッド）
  - 計算機の基礎（チューリング、フォン・ノイマン）
  - 人工知能の基礎（マッカーシー）
- 数理論理学の２つの側面
  - 数学基礎論
  - 情報科学の基礎

準備：推論について

- もしAならばBである（IF A THEN B，A→ B）
  - 必要な単位をすべてとるならば、卒業できる
  - もし、明日が晴ならば、ハイキングに行く
  - 君が秀才ならば、僕は天才だよ
  - 三角形の内角の和は180度である.
- 「もしAならばBである」と「 A である」が正しいならば、「 B である」も正しい
- 「もしAならばBである」と「 BならばC である」が正しいならば、　「AならばC である」も正しい
- 対偶：「AならばB」が正しいなら、「BでないならばAでない」も正しく、逆も成り立つ
  - 卒業できないのは、必要な単位を全部はとってないからだ
  - ハイキングに行けないとしたら、晴れてないということだね。
  - 僕が天才でないのだから、君は秀才ではない。
  - 内角の和が180度でないなら，三角形ではない.

Logical reasoning

- IF A THEN B, A → B
  - If 1 + 1 = 2, then 2 + 1 = 3.
  - We’ll go on a hike if it’ll be fine tomorrow.
- If A is true and A → B is true, then B is true.
- If A → B is true, and B → C is true,　then A → C is true
- If A → B is true, then (not B) → (not A) is true, and vice versa.

準備：推論について－その２

- もしAならばBである（IF A THEN B，A→ B）
  - 校内では制服を着ること (You have to wear a uniform in the school)
    - （校外ならば、私服でも制服でも良い）You don’t have to wear a uniform outside the school.
  - 正方形の4辺は等しい A square is equilateral.
    - 正方形でないならば、4辺が等しい場合と等しくない場合がある (An equilateral quadrangle may be or may not be a square.
- 「もしAならばBである」と「 A である」が正しいならば、「 B である」も正しい
  - 「校内では制服を着ること」、かつ「ここは校内」なら、「制服を着なければならない」
- 「もしAならばBである」と「 BならばC である」が正しいならば、「 A ならばCである」も正しい
- 対偶：「AならばB」が正しいなら、「BでないならばAでない」も正しく、逆も成り立つ
  - 私服は校外に限る
  - 4辺が等しくないならば、正方形ではない

パラドックス(Paradox)

- パラドックスとは、矛盾した論理や現実にあり得ないことをあたかも正しいかのように論証すること。
- A **paradox** is a *seemingly* true statement or group of statements that lead to a contradiction or a situation which *seems to* defy logic or intuition.(Wikipedia)
- パラドックスは、ギリシャ時代から言語における根本的問題とされてきた。
- 自己言及、比喩の誤り、などがよく知られている。

パラドックス(Paradox)

- この箱の中に書いてあることはウソです
  - この文が正しいなら、「ウソ」が正しいので、この文は間違い
  - この文が間違いなら、「ウソ」が誤りなので、この文は正しい
  - 自己言及によって、様々なパラドックスができる。

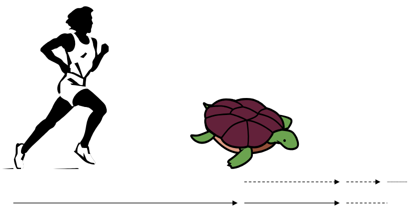
The message in this box is a lie.

Here is a paradox of self-reference.

アキレスと亀のパラドックス

- ゼノン（ギリシャの哲学者）による

アキレスは足が速いので知られている．アキレスと亀が競争するが，ハンデのために，亀はアキレスの10m前から出発する．なお，ゴールまでは十分長いものとする．　アキレスが10m進んだとき，亀はアキレスより少し前にいる．その地点までアキレスが進んだとき，亀はやはり少し進んでいる．… このように，アキレスは永遠に亀に追いつけない．



アキレスが10m進んだとき，亀はアキレスより少し前にいる．
その地点までアキレスが進んだとき，亀はやはり少し進んでいる．…

Paradox of Achilles and the Tortoise (quoted from wikipedia)

- In the paradox of Achilles and the Tortoise, Achilles is in a footrace with the tortoise. Achilles allows the tortoise a head start of 100 metres. If we suppose that each racer starts running at some constant speed (one very fast and one very slow), then after some finite time, Achilles will have run 100 metres, bringing him to the tortoise's starting point. During this time, the tortoise has run a much shorter distance, say, 10 metres. It will then take Achilles some further time to run that distance, by which time the tortoise will have advanced farther; and then more time still to reach this third point, while the tortoise moves ahead. Thus, whenever Achilles reaches somewhere the tortoise has been, he still has farther to go. Therefore, because there are an infinite number of points Achilles must reach where the tortoise has already been, he can never overtake the tortoise. (*Of course, simple experience tells us that Achilles will be able to overtake the tortoise, which is why this is a paradox*.)

ラッセルのパラドックス（1903）

- すべての集合を2つの種類に分ける：自分自身をその要素としてもたないものを第1種，もつものを第2種とする．
- すべての第1種の集合の集合をMと*定義*する．
- 「Mを第1種の集合である」と仮定する．仮定よりM自体はMを要素として含まないはずだが，Mの*定義*からはMはMに要素として含まれているはずである．
- そこで，「Mを第2種の集合である」とすると，MはM自身を要素として含むことになる．ところが，Mの*定義*によって，第2種の集合Mがすべての第1種の集合の集合であるMに含まれることはあり得ない．
- よって，Mを第1種としても第2種としても矛盾が生じる．

Russell’s paradox (1901) (quoted from wikipedia)

Let us call a set "abnormal" if it is a member of itself, and "normal" otherwise. For example, take the set of all squares. That set is not itself a square, and therefore is not a member of the set of all squares. So it is "normal". On the other hand, if we take the complementary set that contains all non-squares, that set is itself not a square and so should be one of its own members. It is "abnormal". Now we consider the set of all normal sets, *R*. Attempting to determine whether *R* is normal or abnormal is impossible: If *R* were a normal set, it would be contained in the set of normal sets (itself), and therefore be abnormal; and if it were abnormal, it would not be contained in the set of normal sets (itself), and therefore be normal. This leads to the conclusion that *R* is both normal and abnormal: Russell's paradox.

認知の問題：論理的に認知できるか？

- 対偶（背理法のこと）
  - ある命題「AならばB」が正しいなら、「BでないならばAでない」も正しく、逆も成り立つ
  - 「AならばB」が正しくても、「BならばA」は正しいとは限らない
- 対偶は一般的に認知するのは難しい。しかし、場合によってはより認知しやすいこともある。

- If A → B is true, then (not B) → (not A) is true, and vice versa (: contraposition)
- Contraposition is often hard to recognize

認知と論理ー対偶の認知の失敗 問題１：

- カードが何枚かあり、表にはアルファベットの子音か母音、裏には数字が書いてあるとする。
- 「母音の裏は偶数です。」 この文が正しいかどうかチェックするにはどのカードを裏返せば良いか？過不足なく答えよ。

E	K	4	7

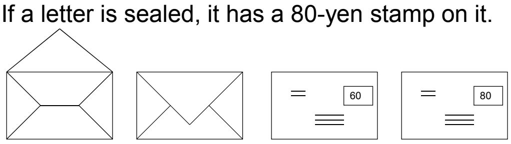
Problem 1

- There are four cards. A letter appears on one side; a number on the other.
- “If a card has a vowel on one side, then it has an even number on the other side.” Judge if this message is right or not, by turning over minimum number of card(s). Which card(s) should be turned over?

E	K	4	7

認知と論理ー対偶の認知 問題２：

- 手紙には、封書（封をしたもの）と開封郵便（開封のまま出す）の2種類がある。下の左端は開封の例、左から2番目は封書の例である。
- 「封書には８０円切手を貼って下さい。」 違反がないかどうか調べるには、どれを裏返せば良いか？必要最小限で答えよ。
- If a letter is sealed, it has a 80-yen stamp on it.



逆は必ずしも真ならず (converse is not always true)

- 一般に，人工的状況設定をすると，対偶の認知や，「逆は必ずしも真ならず」の認知は誤りやすい
  - 認知心理学者による実験で確認
    - PならばQであり，not Pであるとすると，(suppose P implies Q, and not P)
    - 答1：必ずnot Qである（21%）(necessarily not Q)
    - 答2：ときどきnot Qである（77%）(sometimes not Q)
    - 答3：not Qではあり得ない（2%）(necessarily Q)
- 日常的なルールでは，自然に認知していることも多い
  - 例：教会内では，帽子をとること（外では帽子をかぶってもかぶらなくても良い）

    You have to take your hat off in a church.

    （You have no restriction outside of a church.）

Everyday rule can easily be recognized.

統計・論理・認知 (Statistics/Logic/Cognition)

- 確率統計は文・理を問わずあらゆる分野で必要 (Statistics is important in every fields)
- 統計データをもとにする推論は誤りやすい。 (but inference in statistics may be erroneous)
- 統計は、論理的構造を含んでいる。
- 「統計でウソをつく方法」という本がある。 (There is a book: ‘to tell lies by statistics.’)

確率的事象と認知--問題３：

- コインの表をH、裏をTと書く。コインを10回投げるとき(Toss a coin 10 times. Which of the next two will be more probable to come out. H is head; T is tail.)
  - H,H,H,H,H,H,H,H,H,H
  - T,H,T,T,H,H,H,T,T,H

  のどちらが出る確率が高いか？
- 貴方はどちらの番号の宝くじを買いますか？

  (Which of the next two lottery tickets do you want to buy?)
  - 11組 111111
  - 37組 236854

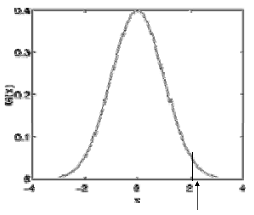
確率的事象と認知

- あるプロ野球チームAの４番打者は3割打者である。ある試合で、３打席続けてヒットを打った。監督は3割打者だからもう打つことはないだろうと考えて代打を立てた。
  - この判断は正しいか？
- ある人の年間総収入は、全国における個人年間総収入の平均値に一致した。
  - この人は、強いて言うと、収入の多いほうに入るか、それとも少ないほうか？

Suppose a man’s income per year is just equal to the mean value of all peoples’ income. Is he relatively rich or relatively poor?

統計における推論の誤り

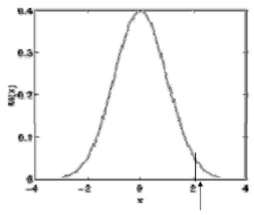
- あるグループの患者に解熱剤Bを投与したところ，熱が平均して1度下がった．よってこの薬Bは有効である
- → 一般には誤り
  - 2重盲検法:プラセボ（偽薬）との比較
  - 統計的検定
    - 効果がないと仮定
    - この仮定のもとで、100回に1回しか起こらないことが起きた
    - 仮定が正しいとするよりも、仮定が間違いとするほうが自然
    - 仮定が間違い＝＞効果あり



Hypothesis testing

- A medicine B for fever was used for a group of patients and resulted in 1 centigrade down. Is B effective?

  → *not true in general*.
  - Double blind test: comparison with a placebo
  - Statistical hypothesis testing
    - A hypothesis: Suppose B has no effect
    - Under this hypothesis we had an event with prob. less than 1%
    - Is this hypothesis true?
    - This hypothesis probably is wrong ⇒ B is effective



問題４ **ベイズ推論における誤り**

B:ある種の癌，A:医学検査 とする．

ガンBがあるとき，検査 A によって95％ ＋ の結果がでる．ガンBがないとき，＋ の結果は5%である．

ある人が検査A を受けたところ、＋の結果になった．

この人がガンBである確率はどれくらいか？

ただし、ガンBは一般に一万人に一人見つかるくらい稀な病気である。

1. 95%
2. 95%より少し高い
3. 95%より少し低い
4. 95%より低く、20%程度
5. 5%程度
6. 1%以下
7. 正しく計算できる。その答は________

Error in a Bayesian inference

- We have a medical test for cancer.
- Existence of cancer B will result in positive by 95%.
- Non-existence of B will result in positive by 5 %.
- Only one in 10,000 will have cancer B generally.
- Suppose you had this test and got positive.
- What is the probability that you actually have cancer?

Framing Effects
Recap: Round 1

- As a doctor in a position of authority, you have been informed that a disease will break out in your country next month and result in the deaths of 600 people. (either death or recovery is the outcome in each case). There are two possible vaccination programmes that you can undertake, and undertaking one precludes the other. *Programme **A** will save 400 people with certainty. Programme **B** will save no one with probability 1/3 and 600 with probability 2/3.*
- You chose: **Programme A or B?**

Framing Effects
Recap: Round 2

- As a doctor in a position of authority, you have been informed that a new disease will break out in your country next month. To fight this epidemic, one of two possible vaccination programmes is to be chosen, and undertaking one precludes the other. ***In programme A, 200 people will die with certainty. In programme B, there is a 2/3 chance that no one will die, and a 1/3 chance that 600 will die.***
- You chose: **Programme A or B?**

ギャンブルの問題
どちらの選択肢を選ぶか？

X

- 第1の問題
  - A. 確実に2,400ドル得られる
  - B. 25%の確率で10,000ドル得られ、75%の確率で何も得られない
- 第2の問題
  - C. 確実に7,400ドル損をする
  - D. 75%の確率で10,000ドル損をするが、25%の確率で何も損をしない

45

パラドックスを語る理由
(Why paradoxes?)

- Fundamental problems of risks are often paradoxical, having dilemmas or no solutions.
  - Dilemmas and false dilemmas are often considered to be a kind of, or closely related to, paradoxes.
  - You may observe many examples in the recent disasters.

問題

- *アキレスと亀のパラドックスについてどう考えるか*
- ラッセルのパラドックスについて、なぜこのパラドックスが重要視されていると思うか
- 論理的認知の問題について感想を述べよ
- 統計的検定について、問題点はあると思うか？
- 年間総収入の問題に答え、感想を述べよ
- ベイズ推論の問題について考えるところを述べよ
- *Framing effectに関する2例について答えよ*

上記の問題について、各自答えた後、グループ討論を行い、その結果について記せ

Questions for an essay:
Your opinion?

- *Paradox on of Achilles and the Tortoise*
- Is the Russell paradox important?
- Problems in logical cognitions (e.g., Problem 1).
- Question of a man’s income.
- Bayesian inference
- *The questions of framing effect.*