セキュリティの基礎

遠藤 靖典

endo@risk.tsukuba.ac.jp

筑波大学大学院 システム情報工学研究科 リスク工学専攻

Department of Risk Engineering
Faculty of Systems and Information Engineering
University of Tsukuba

本講義の目的と内容

目的

セキュリティ実現に不可欠なリスク解析のための方法論について論述する。

Contents

1. 確率について
2. 不確実性のモデル
3. Bayes 推定
4. 期待効用仮説
5. Knight の不確実性理論

1. 確率について

Laplace の算術的確率

$\Downarrow$

頻度主義

$\Downarrow$

Kolmogorov の公理主義

$\Downarrow$

主観確率

Laplace の算術的確率

試行の結果の起こり方を N 通りとし、これらは**全て同程度に確からしい**とする。1 つの事象 A にとって、「それが生じれば事象 A が生起するような」起こり方が R 個あったとき、事象 A の生起する確率 $P(A)$ は、

$$P(A) = \frac{R}{N}$$

で与えられる。

Laplace の算術的確率

試行の結果の起こり方を N 通りとし、これらは**全て同程度に確からしい**とする。1 つの事象 A にとって、「それが生じれば事象 A が生起するような」起こり方が R 個あったとき、事象 A の生起する確率 $P(A)$ は、

$$P(A) = \frac{R}{N}$$

で与えられる。

理由不十分の原則

確率を定義するのに確率を用いているという問題点がある。

理由不十分の原則

Laplace の説明によれば…

我々が**無知**であるがゆえに確率ということが問題になるのであり、同様に確からしいということは、**それを判断する知識が欠けている**ということを意味する。例えば、硬貨を投げたとき、表が出るのと裏が出るのと、どちらがより確からしいかは全く分からない。そこで、表が出ることと裏が出ることは、同様に確からしい、とするのである。

理由不十分の原則

Laplace の説明によれば…

我々が**無知**であるがゆえに確率ということが問題になるのであり、同様に確からしいということは、**それを判断する知識が欠けている**ということを意味する。例えば、硬貨を投げたとき、表が出るのと裏が出るのと、どちらがより確からしいかは全く分からない。そこで、表が出ることと裏が出ることは、同様に確からしい、とするのである。

⇓

Laplace の定義は、「全て同程度に確からしい」と考えられない場合には適用できない。そのような場合には、どうすればいい？

頻度主義

事象 A が生じ得る実験を N 回繰り返したとき、A が N_A 回生起したとする。$P_N(A) = \dfrac{N_A}{N}$ と置く。試行の回数 N を増やし、$N \to \infty$ のとき、A の生起する確率 $P(A)$ を

$$\lim_{N\to\infty} P_N(A) = P(A)$$

とする。R. A. Fisher や J. Neyman によって支持された。

頻度主義

事象 A が生じ得る実験を N 回繰り返したとき、A が N_A 回生起したとする。$P_N(A) = \dfrac{N_A}{N}$ と置く。試行の回数 N を増やし、$N \to \infty$ のとき、A の生起する確率 $P(A)$ を

$$\lim_{N\to\infty} P_N(A) = P(A)$$

とする。R. A. Fisher や J. Neyman によって支持された。

この式の右辺はいつも収束するのか?

Kolmogorov の公理主義

根元事象全体からなる集合を標本空間といい、Ω で表す。標本空間 Ω の部分集合からなる族 F で次の条件を満たすものを、Borel 集合体という。

1. Ω は F に属する。
2. A が F に属すれば、A の補集合も F に属する。
3. A_k $(k = 1, 2, \ldots)$ が F に属するとき、それらの和集合も F に属する。

このとき、F 上で定義された実数値関数 $P(A)$ で、次の 3 条件を満たすものを確率という。

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. F の要素 A_k $(k = 1, 2, \ldots)$ において、互いに排反のとき、A_k の和集合に対応する値は、$P(A_k)$ の和になる。

このようにして定義される (Ω, F, P) を確率空間といい、P を確率測度という。

なぜ確率が金科玉条のごとく扱われているのか?

1. 自然科学者に顕著に見られるが、すべての統計的推移には、「単純かつ美しい法則」が背景にあると信じられている。
2. その確率的法則は、試行を増やせば増やすほど、近似的に確認できる。
3. 逆に、理論的な確率値を前提とした時、観測値の妥当性が確認できる。

なぜ確率が金科玉条のごとく扱われているのか?

1. 自然科学者に顕著に見られるが、すべての統計的推移には、「単純かつ美しい法則」が背景にあると信じられている。
2. その確率的法則は、試行を増やせば増やすほど、近似的に確認できる。
3. 逆に、理論的な確率値を前提とした時、観測値の妥当性が確認できる。

背景

Bernoulli と Kolmogorov によって示された大数の法則

主観確率

「同程度の確からしさで生起」の仮定下での計算や、「生起回数の相対頻度」は、誰が計算しても同一。

主観確率

「同程度の確からしさで生起」の仮定下での計算や、「生起回数の相対頻度」は、誰が計算しても同一。

⇕

主観確率

ひいきの野球チームが次の試合で勝つ確率，選挙の当落など，人が主観的にある確率を与えて分析を行う場合がある。これらの確率は、人の持つ情報、知識、経験等で大きく異なる。

主観確率

「同程度の確からしさで生起」の仮定下での計算や、「生起回数の相対頻度」は、誰が計算しても同一。

$\Updownarrow$

主観確率

ひいきの野球チームが次の試合で勝つ確率，選挙の当落など，人が主観的にある確率を与えて分析を行う場合がある。これらの確率は、人の持つ情報、知識、経験等で大きく異なる。

Bayes 推定，選好理論，期待効用理論，ファジィ理論 $\cdots$

2. 不確実性のモデル

Step.1 ありうる可能性の列挙を行う。

$$\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

Ω を標本空間、A_i を状態、ステイトという。

Step.2 各状態に、起こりやすさの程度を「比」で付加する。付加する方法は、ある程度の合理性があれば問わない。Ω の各要素 A_i に対して、

$$a_1 : a_2 : \cdots : a_i : \cdots : a_n$$

と起こりやすさの程度の比を付加したとき、この各値をオッズといい、

$$L(\Omega) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

と記す。$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ になるように正規化してもよい。

不確実性のモデルにおけるポイント

1. **情報の不足**による不確実性
2. **未来の事象**であるための不確実性

例　試験の合否

- 発表日以前まで→未来の事象
- 発表日以後→ 情報の不足

不確実性のモデルにおけるポイント

例 血液型

$$\left.\begin{array}{l}\Omega = \{\mathsf{A}, \mathsf{O}, \mathsf{B}, \mathsf{AB}\} \\ L(\Omega) = \{4, 3, 2, 1\}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ある人が}\ \mathsf{A}\ \text{である確率}\ P(\mathsf{A}) = 4/10$$

不確実性のモデルにおけるポイント

例　血液型

$$\left.\begin{array}{l}\Omega = \{\mathsf{A}, \mathsf{O}, \mathsf{B}, \mathsf{AB}\} \\ L(\Omega) = \{4, 3, 2, 1\}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ある人が}\ \mathsf{A}\ \text{である確率}\ P(\mathsf{A}) = 4/10$$

状況の変化

O でないと判った．

不確実性のモデルにおけるポイント

例 血液型

$$\left.\begin{array}{l}\Omega = \{\mathsf{A}, \mathsf{O}, \mathsf{B}, \mathsf{AB}\} \\ L(\Omega) = \{4, 3, 2, 1\}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ある人が}\ \mathsf{A}\ \text{である確率}\ P(\mathsf{A}) = 4/10$$

状況の変化

O でないと判った.

$$\left.\begin{array}{l}\Omega = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{AB}\} \\ L(\Omega) = \{4, 2, 1\}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ある人が}\ \mathsf{A}\ \text{である確率}\ P(\mathsf{A}) = 4/7$$

$\|$

「O でない」と判った上での確率⋯条件付き確率$P(\mathsf{A}/\mathsf{O}\ \text{でない})$

不確実性のモデルにおけるポイント

例　血液型

$$\left.\begin{array}{l}\Omega = \{\mathsf{A}, \mathsf{O}, \mathsf{B}, \mathsf{AB}\} \\ L(\Omega) = \{4, 3, 2, 1\}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ある人が}\,\mathsf{A}\,\text{である確率}\ P(\mathsf{A}) = 4/10$$

状況の変化

O でないと判った.

$$\left.\begin{array}{l}\Omega = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{AB}\} \\ L(\Omega) = \{4, 2, 1\}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ある人が}\,\mathsf{A}\,\text{である確率}\ P(\mathsf{A}) = 4/7$$

$$\|$$

「O でない」と判った上での確率…条件付き確率P(A/O でない)

Bayes 推定の考え

3. Bayes 推定

18 世紀後半

スコットランドの長老派教会の牧師だった T. Bayes によって提案.

20 世紀始め

R. A. Fisher や J. Neyman によって激烈な避難にさらされ、一度は葬り去られる.

1954 年

L. J. Savage が記した著書「The Foundation of Statistics」をきっかけとして復権.

現在

Bayes の生み出した理論を基本とした推定を Bayes 推定といい, Fisher や Neyman の創出した統計的推定よりも広く支持.

Bayes 推定の基本

事象 $A_1, \ldots, A_n$ に対し、以下を仮定する。

1. $A_1 \cup \cdots \cup A_n = X$
2. $A_i \cap A_j = \phi \quad (i \neq j)$

A_i の生起確率を $P(A_i)$、A_i が生起したときの B の生起する条件付き確率を $P(B|A_i)$ とすると、B が生起したときの A_i の生起する条件付き確率を $P(A_i|B)$ は、

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}$$

で与えられる。$P(A_i)$ は、A_i の生起の仕方に対してあらかじめ持っていた確率であり、**事前確率**と呼ばれる。それに対して、$P(A_i|B)$ は、B であることを知った後で、A_i の生起の仕方に対して持つことになった確率であり、**事後確率**と呼ばれる。

Fisher と Bayes の違いの例

新しい恋人ができた．彼が本気か遊びかを知りたい．

仮説

1. 他の女性にも人気があるので⋯

   本気 : 遊び $= 1 : 3$　(恣意的に決めた事前確率→**主観確率**)

2. 週に 2 回以上デートできる可能性は⋯

$$\begin{cases} \text{本気の場合} \cdots 60\% \\ \text{遊びの場合} \cdots 30\% \end{cases}$$

Bayes では…

Bayes では···

1 週目： 2 回以上デート

	本気 (1)	遊び (3)
デート 2 回以上	$\frac{1}{4} \times 60\%$	$\frac{3}{4} \times 30\%$
デート 1 回以下	$\frac{1}{4} \times 40\%$	$\frac{3}{4} \times 70\%$

Bayes では···

1 週目： 2 回以上デート

	本気 (1)	遊び (3)
デート 2 回以上	$\frac{1}{4} \times 60\%$	$\frac{3}{4} \times 30\%$
デート 1 回以下	$\frac{1}{4} \times 40\%$	$\frac{3}{4} \times 70\%$

Bayes では…

1 週目： 2 回以上デート

	本気 (1)	遊び (3)
デート 2 回以上	$\frac{1}{4} \times 60\%$	$\frac{3}{4} \times 30\%$
デート 1 回以下	$\frac{1}{4} \times 40\%$	$\frac{3}{4} \times 70\%$

本気 : 遊び $= \frac{1}{4} \times 60\% : \frac{3}{4} \times 30\% = 2 : 3$ に更新 $\rightarrow$ 主観確率の修正

Bayes では…

1 週目： 2 回以上デート		本気 (1)	遊び (3)
	デート 2 回以上	$\frac{1}{4} \times 60\%$	$\frac{3}{4} \times 30\%$
	デート 1 回以下	$\frac{1}{4} \times 40\%$	$\frac{3}{4} \times 70\%$

本気 : 遊び $= \frac{1}{4} \times 60\% : \frac{3}{4} \times 30\% = 2 : 3$ に更新 → 主観確率の修正

2 週目： 2 回以上デート		本気 (2)	遊び (3)
	デート 2 回以上	$\frac{2}{5} \times 60\%$	$\frac{3}{5} \times 30\%$
	デート 1 回以下	$\frac{2}{5} \times 40\%$	$\frac{3}{5} \times 70\%$

Bayes では…

1 週目： 2 回以上デート

	本気 (1)	遊び (3)
デート 2 回以上	$\frac{1}{4} \times 60\%$	$\frac{3}{4} \times 30\%$
デート 1 回以下	$\frac{1}{4} \times 40\%$	$\frac{3}{4} \times 70\%$

本気 : 遊び $= \frac{1}{4} \times 60\% : \frac{3}{4} \times 30\% = 2 : 3$ に更新 → 主観確率の修正

2 週目： 2 回以上デート

	本気 (2)	遊び (3)
デート 2 回以上	$\frac{2}{5} \times 60\%$	$\frac{3}{5} \times 30\%$
デート 1 回以下	$\frac{2}{5} \times 40\%$	$\frac{3}{5} \times 70\%$

Bayes では⋯

1 週目： 2 回以上デート

	本気 (1)	遊び (3)
デート 2 回以上	$\frac{1}{4} \times 60\%$	$\frac{3}{4} \times 30\%$
デート 1 回以下	$\frac{1}{4} \times 40\%$	$\frac{3}{4} \times 70\%$

本気 : 遊び $= \frac{1}{4} \times 60\% : \frac{3}{4} \times 30\% = 2 : 3$ に更新 $\rightarrow$ 主観確率の修正

2 週目： 2 回以上デート

	本気 (2)	遊び (3)
デート 2 回以上	$\frac{2}{5} \times 60\%$	$\frac{3}{5} \times 30\%$
デート 1 回以下	$\frac{2}{5} \times 40\%$	$\frac{3}{5} \times 70\%$

本気 : 遊び $= \frac{2}{5} \times 60\% : \frac{3}{5} \times 30\% = 4 : 3$ に更新

Bayes では⋯

	本気 (1)	遊び (3)
1 週目： 2 回以上デート　デート 2 回以上	$\frac{1}{4} \times 60\%$	$\frac{3}{4} \times 30\%$
デート 1 回以下	$\frac{1}{4} \times 40\%$	$\frac{3}{4} \times 70\%$

本気 : 遊び $= \frac{1}{4} \times 60\% : \frac{3}{4} \times 30\% = 2 : 3$ に更新 → 主観確率の修正

	本気 (2)	遊び (3)
2 週目： 2 回以上デート　デート 2 回以上	$\frac{2}{5} \times 60\%$	$\frac{3}{5} \times 30\%$
デート 1 回以下	$\frac{2}{5} \times 40\%$	$\frac{3}{5} \times 70\%$

本気 : 遊び $= \frac{2}{5} \times 60\% : \frac{3}{5} \times 30\% = 4 : 3$ に更新

	本気 (4)	遊び (3)
3 週目： デートは 1 回　デート 2 回以上	$\frac{4}{7} \times 60\%$	$\frac{3}{7} \times 30\%$
デート 1 回以下	$\frac{4}{7} \times 40\%$	$\frac{3}{7} \times 70\%$

↑

状況の変化

Bayes では…

	本気 (1)	遊び (3)
デート 2 回以上	$\frac{1}{4} \times 60\%$	$\frac{3}{4} \times 30\%$
デート 1 回以下	$\frac{1}{4} \times 40\%$	$\frac{3}{4} \times 70\%$

1 週目： 2 回以上デート

本気 : 遊び $= \frac{1}{4} \times 60\% : \frac{3}{4} \times 30\% = 2 : 3$ に更新 → 主観確率の修正

	本気 (2)	遊び (3)
デート 2 回以上	$\frac{2}{5} \times 60\%$	$\frac{3}{5} \times 30\%$
デート 1 回以下	$\frac{2}{5} \times 40\%$	$\frac{3}{5} \times 70\%$

2 週目： 2 回以上デート

本気 : 遊び $= \frac{2}{5} \times 60\% : \frac{3}{5} \times 30\% = 4 : 3$ に更新

	本気 (4)	遊び (3)
デート 2 回以上	$\frac{4}{7} \times 60\%$	$\frac{3}{7} \times 30\%$
デート 1 回以下	$\frac{4}{7} \times 40\%$	$\frac{3}{7} \times 70\%$

3 週目： デートは 1 回

↑

状況の変化

Bayes では…

1 週目： 2 回以上デート

	本気 (1)	遊び (3)
デート 2 回以上	$\frac{1}{4} \times 60\%$	$\frac{3}{4} \times 30\%$
デート 1 回以下	$\frac{1}{4} \times 40\%$	$\frac{3}{4} \times 70\%$

本気 : 遊び $= \frac{1}{4} \times 60\% : \frac{3}{4} \times 30\% = 2 : 3$ に更新 $\rightarrow$ 主観確率の修正

2 週目： 2 回以上デート

	本気 (2)	遊び (3)
デート 2 回以上	$\frac{2}{5} \times 60\%$	$\frac{3}{5} \times 30\%$
デート 1 回以下	$\frac{2}{5} \times 40\%$	$\frac{3}{5} \times 70\%$

本気 : 遊び $= \frac{2}{5} \times 60\% : \frac{3}{5} \times 30\% = 4 : 3$ に更新

3 週目： デートは 1 回

$\uparrow$

状況の変化

	本気 (4)	遊び (3)
デート 2 回以上	$\frac{4}{7} \times 60\%$	$\frac{3}{7} \times 30\%$
デート 1 回以下	$\frac{4}{7} \times 40\%$	$\frac{3}{7} \times 70\%$

本気 : 遊び $= \frac{4}{7} \times 40\% : \frac{3}{7} \times 70\% = 16 : 21$ に更新

$\cdots \rightarrow$ 真実に近づいていく.

もしも **Fisher** だったら…

1 週目　「まだどんな男か判りません．Bayes のように，その場その場での判断は危険です．とりあえず 10 週間付き合ってみて，そのデータを集めて判断しましょう．」

⋮

もしも **Fisher** だったら…

1 週目　「まだどんな男か判りません．Bayes のように，その場その場での判断は危険です．とりあえず 10 週間付き合ってみて，そのデータを集めて判断しましょう.」

⋮

10 週目　「10 週間だけでは有意確率は低く，はっきりしたことは言えません．もうしばらく様子を見てみましょう.」

もしも Fisher だったら⋯

1 週目　「まだどんな男か判りません．Bayes のように，その場その場での判断は危険です．とりあえず 10 週間付き合ってみて，そのデータを集めて判断しましょう.」

⋮

10 週目　「10 週間だけでは有意確率は低く，はっきりしたことは言えません．もうしばらく様子を見てみましょう.」

- Bayes⋯各週ごとの心の変化を反映
- Fisher⋯交際スタートの瞬間にこだわり，10 週間心変りしないものとして判断

もしも Fisher だったら…

1 週目　「まだどんな男か判りません．Bayes のように，その場その場での判断は危険です．とりあえず 10 週間付き合ってみて，そのデータを集めて判断しましょう.」

⋮

10 週目　「10 週間だけでは有意確率は低く，はっきりしたことは言えません．もうしばらく様子を見てみましょう.」

- Bayes…各週ごとの心の変化を反映
- Fisher…交際スタートの瞬間にこだわり，10 週間心変りしないものとして判断

注意

Bayes 推定における Ω は「モデルの違い」であり,「不確実現象の違い」ではない.

3. 期待効用仮説

$$\begin{cases} \textbf{クジ A} \quad \text{確率 } 1/2 \text{ で } 3 \text{ 万円} \\ \textbf{クジ B} \quad \text{確率 } 1/2 \text{ で } 2 \text{ 万円} \end{cases}$$

3. 期待効用仮説

$$\begin{cases} \textbf{クジ A} & \text{確率 } 1/2 \text{ で } 3 \text{ 万円} \\ \textbf{クジ B} & \text{確率 } 1/2 \text{ で } 2 \text{ 万円} \end{cases}$$

賞金の大小→クジ A

3. 期待効用仮説

$$\begin{cases} \textbf{クジ A} & \text{確率 } 1/2 \text{ で } 3 \text{ 万円} \\ \textbf{クジ B} & \text{確率 } 1/2 \text{ で } 2 \text{ 万円} \end{cases}$$

賞金の大小→クジ A

$$\begin{cases} \textbf{クジ C} & \text{確率 } 1/2 \text{ で } 2 \text{ 万円} \\ \textbf{クジ D} & \text{確率 } 1/3 \text{ で } 2 \text{ 万円} \end{cases}$$

3. 期待効用仮説

$$\begin{cases} \textbf{クジA} & \text{確率 } 1/2 \text{ で } 3 \text{ 万円} \\ \textbf{クジB} & \text{確率 } 1/2 \text{ で } 2 \text{ 万円} \end{cases}$$

賞金の大小→クジ A

$$\begin{cases} \textbf{クジC} & \text{確率 } 1/2 \text{ で } 2 \text{ 万円} \\ \textbf{クジD} & \text{確率 } 1/3 \text{ で } 2 \text{ 万円} \end{cases}$$

確率の大小→クジ C

3. 期待効用仮説

$$\begin{cases} \textbf{クジA} & 確率\,1/2\,で\,3\,万円 \\ \textbf{クジB} & 確率\,1/2\,で\,2\,万円 \end{cases}$$

賞金の大小→クジ A

$$\begin{cases} \textbf{クジC} & 確率\,1/2\,で\,2\,万円 \\ \textbf{クジD} & 確率\,1/3\,で\,2\,万円 \end{cases}$$

確率の大小→クジ C

$$\begin{cases} \textbf{クジE} & 確率\,1/2\,で\,4\,万円,\ 確率\,1/2\,で\,2\,万円 \\ \textbf{クジF} & 確率\,1/4\,で\,8\,万円,\ 確率\,3/4\,で\,1\,万円 \end{cases}$$

3. 期待効用仮説

$$\begin{cases} \textbf{クジ A} & \text{確率 } 1/2 \text{ で } 3 \text{ 万円} \\ \textbf{クジ B} & \text{確率 } 1/2 \text{ で } 2 \text{ 万円} \end{cases}$$

賞金の大小→クジ A

$$\begin{cases} \textbf{クジ C} & \text{確率 } 1/2 \text{ で } 2 \text{ 万円} \\ \textbf{クジ D} & \text{確率 } 1/3 \text{ で } 2 \text{ 万円} \end{cases}$$

確率の大小→クジ C

$$\begin{cases} \textbf{クジ E} & \text{確率 } 1/2 \text{ で } 4 \text{ 万円，確率 } 1/2 \text{ で } 2 \text{ 万円} \\ \textbf{クジ F} & \text{確率 } 1/4 \text{ で } 8 \text{ 万円，確率 } 3/4 \text{ で } 1 \text{ 万円} \end{cases}$$

期待値の大小→クジ E?

聖ペテルブルクのパラドクス (Bernoulli)

コイン投げ：

$$
\begin{cases}
1\,\text{回目に初めて表} & \cdots \quad 2\,\text{円の賞金} \\
2\,\text{回目に初めて表} & \cdots \quad 4\,\text{円の賞金} \\
\vdots & \\
n\,\text{回目に初めて表} & \cdots \quad 2^n\,\text{円の賞金}
\end{cases}
$$

このゲームを平等にするためには，最初にいくら胴元に払えばよいか?

聖ペテルブルクのパラドクス (Bernoulli)

コイン投げ：

$$\begin{cases} 1\text{回目に初めて表} & \cdots & 2\text{円の賞金} \\ 2\text{回目に初めて表} & \cdots & 4\text{円の賞金} \\ & \vdots & \\ n\text{回目に初めて表} & \cdots & 2^n\text{円の賞金} \end{cases}$$

このゲームを平等にするためには，最初にいくら胴元に払えばよいか?

$$\text{期待値基準：} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^n = \infty \ !?$$

Bernoulli の仮説

人々は金額の期待値を基に行動しているのではなく，金額に対応する効用を基に行動している．

Bernoulli の仮説

人々は金額の期待値を基に行動しているのではなく，金額に対応する効用を基に行動している．

1. 金額に対応する効用はどうやって決めるか?

Bernoulli の仮説

人々は金額の期待値を基に行動しているのではなく，金額に対応する効用を基に行動している．

1. 金額に対応する効用はどうやって決めるか?
2. なぜこのような考えが人々の行動の規範となるのか?

Bernoulli の仮説

人々は金額の期待値を基に行動しているのではなく，金額に対応する効用を基に行動している．

1. 金額に対応する効用はどうやって決めるか?
2. なぜこのような考えが人々の行動の規範となるのか?

$\Downarrow$

von Neumann と Morgenstern の期待効用仮説 (1947)

選好順序

集合 X に属する任意の A, B において：

1. $A \succsim A$ (少なくとも同等か良い，無差別)
2. $A \succsim B,\ B \succsim C \Rightarrow A \succsim C$ (選好半順序)
3. $A \succsim B$ または $B \succsim A$ $(\forall A, B)$ (選好全順序)

反対称律「$A \succsim B,\ B \succsim A \Rightarrow A = B$」がないので，順序関係より緩い.

期待効用関数

A, B が確率的に得られるとし, $A \succ B$ とする. この時, $A \succ B$ だけでは, どちらを選ぶかは決められない.
例えば, $A = 100$ 万円, $B = 99$ 万円と, $A = 100$ 万円, $B = 20$ 万円とでは,「$\succ$」の意味が異なる. A と B に「どの程度の価値があるか」が重要.
その価値を実数で表したものを, $U(A)$, $U(B)$ と書く. U は効用関数と呼ばれる.

A を B より好む

$$U(A) \geq U(B) \Leftrightarrow A \succsim B$$

期待効用仮説

$$A \succ B \Leftrightarrow U(A) > U(B)$$
$$A \prec B \Leftrightarrow U(A) < U(B)$$

を表現する効用関数 $U(\cdot)$ は一意ではないが必ず存在する．

期待効用仮説

選び得る方策 A について生じる結果 x_j と，x_j を得る確率 p_j が与えられている時，その方策の効用関数は

$$U(A) = \sum p_j U(x_j)$$

で表すことができ，人間は $U(A)$ を最大化するように選好を行っている．(von Neumann & Morgenstern)

聖ペテルブルクのパラドクスの解決案

金額 x に対応する効用関数を

$$U(x) = k \log x \quad (k > 0)$$

とすると，

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot U(2^n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot k \log 2^n \\ &= k \log 4 \end{aligned}$$

となり，収束する．

4. Knight の不確実性理論

期待効用仮説への反論…例：エルスバーグ・パラドクス

4. Knightの不確実性理論

期待効用仮説への反論…例：エルスバーグ・パラドクス

A 赤い玉が出たら賞金，黒い玉が出たらはずれ

$$\begin{cases} \textbf{つぼ I} & \text{赤い玉 50 個，黒い玉 50 個.} \\ \textbf{つぼ II} & \text{赤い玉 50 個と黒い玉合わせて 100 個.} \end{cases}$$

4. Knight の不確実性理論

期待効用仮説への反論···例：エルスバーグ・パラドクス

A 赤い玉が出たら賞金，黒い玉が出たらはずれ

$$\begin{cases} \textbf{つぼ I} & \text{赤い玉 50 個，黒い玉 50 個.} \\ \textbf{つぼ II} & \text{赤い玉 50 個と黒い玉合わせて 100 個.} \end{cases}$$

B 赤い玉 30 個，青い玉と緑の玉合わせて 60 個の計 90 個が入っているツボ.

$$\begin{cases} \textbf{状況 III} & \text{赤い玉が出たら賞金，他ははずれ.} \\ \textbf{状況 IV} & \text{青い玉が出たら賞金，他ははずれ.} \end{cases}$$

4. Knight の不確実性理論

期待効用仮説への反論…例：エルスバーグ・パラドクス

A 赤い玉が出たら賞金，黒い玉が出たらはずれ

- **つぼ I**　赤い玉 50 個，黒い玉 50 個.
- **つぼ II**　赤い玉 50 個と黒い玉合わせて 100 個.

B 赤い玉 30 個，青い玉と緑の玉合わせて 60 個の計 90 個が入っているツボ.

- **状況 III**　赤い玉が出たら賞金，他ははずれ.
- **状況 IV**　青い玉が出たら賞金，他ははずれ.

- **状況 V**　青い玉か緑の玉が出たら賞金，赤い玉ははずれ.
- **状況 VI**　赤い玉か青い玉が出たら賞金，緑の玉ははずれ.

エルスバーグ・パラドクス

主観確率はどちらも同じなので，期待効用理論だと同じはず．では，なぜ違う?

エルスバーグ・パラドクス

主観確率はどちらも同じなので，期待効用理論だと同じはず．では，なぜ違う?

Frank Knight

確率の判っている不確実性と判らない不確実性は区別しなければならない．

Frank Knight の定義

- 確率計算可能な不確実性···**リスク**
- 確率計算不可能な不確実性···**不確実性**

- 確率が判っている不確実性はもはや不確実ではない.
- 同一の独立試行の反復による大数の法則を背景にした確率論は,現実社会の不確実性を描写していない.

不確実性回避

人間は「確率の判らない不確実性」を避ける傾向にある.

エルスバーグ・パラドクス A のモデル化 1

$$
\begin{array}{lcl}
\text{つぼ I} & \cdots & \Omega = \{\text{赤}, \text{黒}\},\ \ L(\Omega) = \{1, 1\} \\
\text{つぼ II} & \cdots & \Omega = \{\text{赤}, \text{黒}\},\ \ L(\Omega) = \{?, ?\}
\end{array}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\text{I} & P(\text{赤}) = P(\text{黒}) = 1/2 \\
\text{II} & F(\text{赤}) = F(\text{黒}) =?
\end{array}
\right.
$$

エルスバーグ・パラドクス A のモデル化 1

$$\begin{array}{lll} \text{つぼ I} & \cdots & \Omega = \{\text{赤}, \text{黒}\},\ L(\Omega) = \{1, 1\} \\ \text{つぼ II} & \cdots & \Omega = \{\text{赤}, \text{黒}\},\ L(\Omega) = \{?, ?\} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{I} & P(\text{赤}) = P(\text{黒}) = 1/2 \\ \mathrm{II} & F(\text{赤}) = F(\text{黒}) =? \end{array} \right.$$

ツボ I の方が II より色を当てやすいと思っているので，$\mathrm{I} \succ \mathrm{II}$

エルスバーグ・パラドクス A のモデル化 1

$$
\begin{array}{lcl}
\text{つぼ I} & \cdots & \Omega = \{\,\text{赤}, \text{黒}\,\},\;\; L(\Omega) = \{1, 1\} \\
\text{つぼ II} & \cdots & \Omega = \{\,\text{赤}, \text{黒}\,\},\;\; L(\Omega) = \{?, ?\}
\end{array}
$$

$$
\begin{cases}
\text{I} & P(\text{赤}) = P(\text{黒}) = 1/2 \\
\text{II} & F(\text{赤}) = F(\text{黒}) =?
\end{cases}
$$

ツボ I の方が II より色を当てやすいと思っているので，$\mathrm{I} \succ \mathrm{II}$

$$
\begin{array}{ccc}
P(\text{赤}) & > & F(\text{赤}) \\
P(\text{黒}) & > & F(\text{黒}) \\
\hline
1 & > & F(\text{赤}) + F(\text{黒})
\end{array}
$$

エルスバーグ・パラドクス A のモデル化 1

$$
\begin{array}{lcl}
\text{つぼ I} & \cdots & \Omega = \{\,\text{赤},\text{黒}\,\},\ \ L(\Omega) = \{1,1\} \\
\text{つぼ II} & \cdots & \Omega = \{\,\text{赤},\text{黒}\,\},\ \ L(\Omega) = \{?,?\}
\end{array}
$$

$$
\begin{cases}
\text{I} & P(\text{赤}) = P(\text{黒}) = 1/2 \\
\text{II} & F(\text{赤}) = F(\text{黒}) =?
\end{cases}
$$

ツボ I の方が II より色を当てやすいと思っているので，$\text{I} \succ \text{II}$

$$
\begin{array}{ccc}
P(\text{赤}) & > & F(\text{赤}) \\
P(\text{黒}) & > & F(\text{黒}) \\
\hline
1 & > & F(\text{赤}) + F(\text{黒})
\end{array}
$$

非加法的確率

エルスバーグ・パラドクス A のモデル化 2

とりあえず多くのオッズを考える (マルチプル・プレーヤ).
ツボ II は赤と黒とで 100 個なので

$$\left.\begin{array}{lcl} S_1: \quad P(\text{赤}):P(\text{黒}) & = & 0:100 \\ \quad\quad\quad\quad \wr & & \\ S_{101}: \quad P(\text{赤}):P(\text{黒}) & = & 100:0 \end{array}\right\} \text{101 個の状況} \Leftarrow \text{心の中の違い}$$

全ての状況 S_i の赤が出る期待値 a_i と黒が出る期待値 b_i を計算すると

エルスバーグ・パラドクス A のモデル化 2

とりあえず多くのオッズを考える (マルチプル・プレーヤ).
ツボ II は赤と黒とで 100 個なので

$$\left.\begin{array}{llcl} S_1: & P(\text{赤}):P(\text{黒}) & = & 0:100 \\ & \quad\quad\wr & & \\ S_{101}: & P(\text{赤}):P(\text{黒}) & = & 100:0 \end{array}\right\} \text{101 個の状況} \Leftarrow \text{心の中の違い}$$

全ての状況 S_i の赤が出る期待値 a_i と黒が出る期待値 b_i を計算すると

$$\left\{\begin{array}{l} a_i = \frac{i+1}{100} \\ b_i = \frac{99-i}{100} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \min_i a_i = \min_i b_i = 0 \cdots \text{マルチプル期待値}$$

エルスバーグ・パラドクス A のモデル化 2

とりあえず多くのオッズを考える (マルチプル・プレーヤ).
ツボ II は赤と黒とで 100 個なので

$$\left.\begin{array}{lccc} S_1: & P(\text{赤}):P(\text{黒}) & = & 0:100 \\ & \wr & & \\ S_{101}: & P(\text{赤}):P(\text{黒}) & = & 100:0 \end{array}\right\} 101\text{ 個の状況} \Leftarrow \text{心の中の違い}$$

全ての状況 S_i の赤が出る期待値 a_i と黒が出る期待値 b_i を計算すると

$$\begin{cases} a_i = \frac{i+1}{100} \\ b_i = \frac{99-i}{100} \end{cases} \Rightarrow \min_i a_i = \min_i b_i = 0 \cdots \text{マルチプル期待値}$$

ツボ I は $a_i = b_i = 1/2$

エルスバーグ・パラドクス A のモデル化 2

とりあえず多くのオッズを考える (マルチプル・プレーヤ).
ツボ II は赤と黒とで 100 個なので

$$\left.\begin{array}{lccc} S_1 : & P(\text{赤}) : P(\text{黒}) & = & 0 : 100 \\ & \wr & & \\ S_{101} : & P(\text{赤}) : P(\text{黒}) & = & 100 : 0 \end{array}\right\} 101\text{ 個の状況} \Leftarrow \text{心の中の違い}$$

全ての状況 S_i の赤が出る期待値 a_i と黒が出る期待値 b_i を計算すると

$$\left\{\begin{array}{l} a_i = \frac{i+1}{100} \\ b_i = \frac{99-i}{100} \end{array}\right. \Rightarrow \min_i a_i = \min_i b_i = 0 \cdots\text{マルチプル期待値}$$

ツボ I は $a_i = b_i = 1/2$

エルスバーグ・パラドクス A のモデル化 2

とりあえず多くのオッズを考える (マルチプル・プレーヤ).
ツボ II は赤と黒とで 100 個なので

$$\left.\begin{array}{lccc} S_1: & P(\text{赤}):P(\text{黒}) & = & 0:100 \\ & \wr & & \\ S_{101}: & P(\text{赤}):P(\text{黒}) & = & 100:0 \end{array}\right\} \text{101 個の状況} \Leftarrow \text{心の中の違い}$$

全ての状況 S_i の赤が出る期待値 a_i と黒が出る期待値 b_i を計算すると

$$\left\{\begin{array}{l} a_i = \frac{i+1}{100} \\ b_i = \frac{99-i}{100} \end{array}\right. \Rightarrow \min_i a_i = \min_i b_i = 0 \cdots \text{マルチプル期待値}$$

ツボ I は $a_i = b_i = 1/2$

マックスミン原理

人間か確率の判らない状態では複数のマルチプル・プレーヤを持ち,
マルチプル期待値の大きい行動をとる.

エルスバーグ・パラドクスの意味

不確実性回避

不確実性をリスクより嫌う

確率が判っても，生起する事象を自ら選べる訳ではないのに，なぜ?

1. **意志の問題**
   人間は自分の運命を自分で決めたい．(クジを引く順番の問題)
2. **情報量の問題**
   運命に身を委ねるとしても，運命の正体を知った上で委ねたい.

まとめ

1. Laplace から Kolmogorov への確率の流れ
   主観確率の登場
2. Bayes 推定
   Fisher 流との相違
3. 期待効用仮説
   人間の判断の基準，期待値と期待効用
4. 不確実性理論
   期待効用仮説では説明できない不確実性へのアプローチ